



Sur des Gouttes, Cristaux Liquides et Front

René Rojas

► To cite this version:

René Rojas. Sur des Gouttes, Cristaux Liquides et Front. Physique [physics]. Université Nice Sophia Antipolis, 2005. Français. NNT: . tel-00129102

HAL Id: tel-00129102

<https://theses.hal.science/tel-00129102>

Submitted on 5 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS
FACULTÉ DES SCIENCES
INSTITUT NON LINÉAIRE DE NICE
Ecole Doctorale
Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

Spécialité : Physique

par

René ROJAS

Sur des Gouttes, Cristaux Liquides et Fronts

Dirigée par Stefania RESIDORI
et soutenue le 3 décembre 2005 à 11h

Jury

Mlle. Stefania RESIDORI	Directrice de Thèse
M. Pierre COULLET	Président du Jury
M. Enrique TIRAPEGUI	Rapporteur
M. Stéphane FAUVE	Rapporteur
M. Marc-Étienne BRACHET	Examineur
M. Sergio RICA	Examineur

à l'INSTITUT NON LINÉAIRE DE NICE

Ольга

Remerciements

Je tiens à remercier Stefania Residori

Table des matières

1	Les Effets Non-Adiabatiques sur la Vitesse d'un Front de Pomeau	1
1.1	Introduction	1
1.2	Exemples Simples	2
1.2.1	Premier Exemple	3
1.2.2	Deuxième Exemple	9
1.2.3	Troisième Exemple	11
1.3	Les Effets Non-Adiabatiques	13
1.4	Calcul des Intégrales	23
1.4.1	Calcul de l'intégrale I de la vitesse du front	24
1.4.2	Calcul de la Phase	26
2	Une Goutte qui tombe dans un Fluide plus dense	31
2.1	Introduction	31
2.2	Instabilités Hydrodynamiques	32
2.2.1	Instabilité de Kelvin- Helmholtz	33
2.2.2	Instabilité de Rayleigh-Taylor	38
2.3	Montage Expérimental et Traitement de Données	39
2.4	Données	40
2.5	Modèle Théorique Simple	44
2.6	Comparaison entre le Modèle et les Résultats des Expériences	46
2.7	Interaction entre l'Anneau de Vorticité et la Surface	50
2.8	Conclusion	51
3	La Valve à Cristaux Liquides avec Rétro-Action Optique : Étude Linéaire	53
3.1	Introduction	53
3.2	Les Cristaux Liquides	54
3.3	Le Montage Expérimental	58
3.4	Le Modèle Théorique de la LCLV avec Rétro-Action Optique	60
3.5	L'Analyse de Stabilité Linéaire	62
3.6	Forme Normale et Modèle Théorique de Pics Localisés	74
	Publications	81
	Bibliographie	117

1 Les Effets Non-Adiabatiques sur la Vitesse d'un Front de Pomeau

1.1 Introduction

Un système physique en équilibre thermodynamique admet un seul état stable. Si le système est forcé hors d'équilibre, pour les mêmes valeurs de paramètre, il peut avoir plusieurs états stables et le choix dépendra des conditions initiales. Si en plus le système est spatialement étendu et a plus d'un état stable, certaines régions peuvent être dominées par un état, et d'autres dominées par un autre état. La frontière entre ces régions s'appelle « *front* ». Un critère de stabilité relative entre deux états stables est d'observer le mouvement du front lorsqu'il envahit l'état moins stable. Si le front ne se déplace pas, on dit que les deux états sont également stables ou métastables. Dans le cas variationnel, dans lequel on peut définir une énergie, le point d'égale énergie entre deux états s'appelle *point de Maxwell* et en général, seulement à ce point-là, la vitesse du front est nulle.

Les fronts les plus simples sont les connections entre deux états homogènes, puis viennent les *fronts de Pomeau*, qui sont les connections entre un état homogène stationnaire et une solution périodique (voir figure (1.1)). En 1986 Yves Pomeau a remarqué que ce type de front présentait une vitesse nulle non seulement au point de Maxwell, mais aussi dans un intervalle autour de ce point [70]. Cependant, quand on passe à la *forme normale* (équation différentielle, plus simple, en générale non linéaire qui décrit un système près d'un point de bifurcation [9, 43, 49, 53]) puis on calcule la vitesse du front, on obtient une expression analytique qui est nulle seulement au point de Maxwell. En 1988, Bensimon, Shraiman et Croquette ont donné l'explication en considérant un cas particulier[11]. Ils ont ajouté les termes non résonants, les plus importants, à la forme normale et ont obtenu un intervalle où la vitesse du front est nulle. Quand on passe à la forme normale, les termes non résonants sont négligés à cause d'une différence d'échelle, ces termes oscillent plus rapidement que la modulation qui est à une échelle plus lente. Mais, dans le cas des fronts de Pomeau, autour du cœur du front, la modulation varie avec une échelle comparable à celle de la solution périodique, alors l'hypothèse de base, utilisée pour éliminer les termes non résonants, n'est plus valable.

Notre calcul est basé sur les idées de Bensimon, Shraiman et Croquette. Nous partons du cas le plus général d'un système physique avec bifurcation sous-critique et nombre d'onde donné par l'analyse linéaire, nous trouvons la forme normale correspondante et ajoutons tous les termes non résonants qui respectent les symétries du problème original. Puis, nous utilisons les modes de Goldstone et le calcul de Kawasaki et Otha[54], et nous

trouvons la formule générale pour la vitesse du front qui possède la propriété d'être nulle dans un intervalle non nul, comme il a été prédit par Pomeau.

Récemment, Clerc, Falcón et Tirapegui[30, 45] ont démontré que quand on ajoute du bruit additif, la vitesse est nulle à nouveau, seulement au point de Maxwell, et la vitesse induite par le bruit est proportionnelle au facteur d'Arrhenius (exponentielle de la différence de potentiel divisée par l'intensité du bruit). Alors c'est un problème d'échelle du temps déterminé par la différence de potentiel et par l'intensité du bruit.

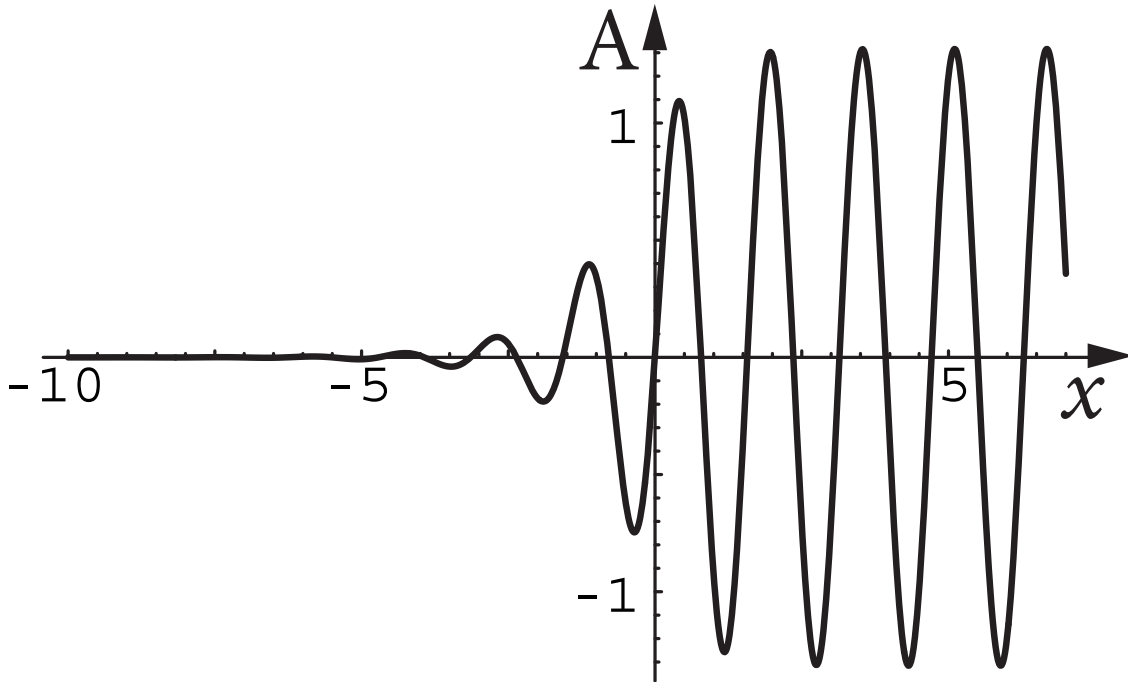


FIG. 1.1: Le graphique de la connexion hétérocline entre un état homogène et un état périodique (front de Pomeau).

1.2 Exemples Simples

Avant de montrer le calcul, pour mieux comprendre la suite, nous allons voir trois exemples simples de bifurcation super-critique avec un terme de couplage spatial de type diffusif. Dans le premier exemple nous ajoutons un terme constant qui brise la symétrie $u \rightarrow -u$, dans le deuxième nous ajoutons un terme oscillatoire qui brise l'invariance par translation spatiale et dans le troisième nous faisons la combinaison des deux exemples précédents. Dans ces deux exemples, nous calculons la vitesse du front entre les deux états stables et, finalement, nous combinons ces deux exemples pour voir l'effet de l'accrochage.

1.2.1 Premier Exemple

Soit un système décrit par l'équation

$$\partial_t u = \eta + u - u^3 + u_{xx} \quad (1.1)$$

où $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ est la dérivée partielle par rapport au temps et $u_x = \partial_x u \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ est la dérivée partielle par rapport à l'espace. Quand $\eta = 0$, l'équation (1.1) a l'invariance $u \rightarrow -u$, mais quand $\eta \neq 0$, nous allons voir l'effet de la brisure de cette symétrie. Ce système a une fonctionnelle de Lyapunov \mathcal{F} associée, c'est-à-dire, l'équation (1.1) peut être écrite sous la forme suivante

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u}$$

et

$$\mathcal{F} = \int \left(U(u) + \frac{1}{2} u_x^2 \right) dx \quad (1.2)$$

où

$$U(u) = -\eta u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}. \quad (1.3)$$

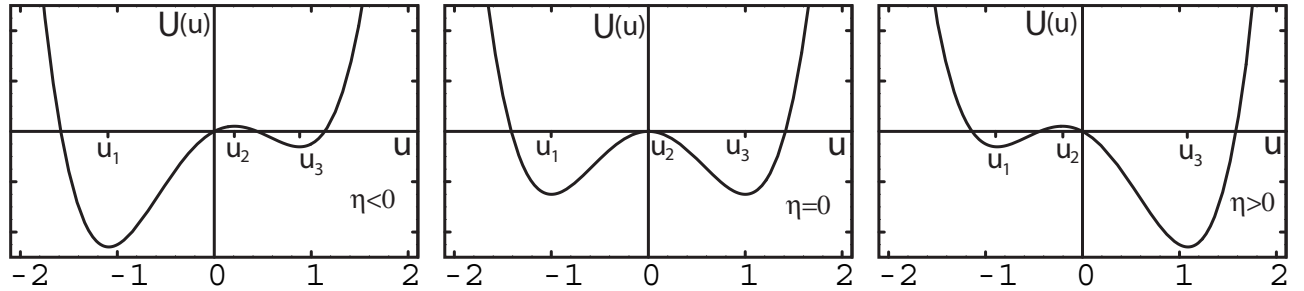


FIG. 1.2: Le graphique du potentiel $U(u)$ pour trois valeurs différentes du paramètre η ($\eta < 0$, $\eta = 0$ et $\eta > 0$).

L'évolution du système va vers la minimisation de cette fonctionnelle, parce que la fonctionnelle est toujours décroissante sur les trajectoires du système,

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \frac{\partial u}{\partial t} = - \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \right)^2 \leq 0.$$

De la forme de \mathcal{F} , nous voyons que le minimum de la fonctionnelle est atteint quand $u_x = 0$, et il est alors donné par le minimum du potentiel $U(u)$. Dans la figure (1.2) qui montre la forme de ce potentiel pour différentes valeurs du paramètre η , on voit que le minimum global change de position en fonction du signe de η et que, pour $\eta = 0$, il y a deux minima globaux.

Nous obtenons les points fixes du système en annulant la dérivée du potentiel $U(u)$

$$U'(u) = -\eta - u + u^3 = 0 \quad (1.4)$$

et nous obtenons aussi le minimum de la fonctionnelle \mathcal{F} . Soit u_1 , u_2 et u_3 les trois solutions de cette équation cubique, ces solutions sont réelles si $|\eta| \leq 2/(3\sqrt{3})$. Si $|\eta| = 2/(3\sqrt{3})$, un point fixe stable entre en collision avec le point fixe instable. Nous arrangeons ces solutions tel que $u_1 < u_2 < u_3$. Sur le graphique (1.2), nous voyons que u_1 et u_3 sont des minima locaux et u_2 est un maximum local, si $\eta < 0$, u_1 est le minimum global ($U(u_1) < U(u_3)$), si $\eta > 0$, u_3 est le minimum global ($U(u_1) > U(u_3)$) et si $\eta = 0$, u_1 et u_3 sont les minima globaux, ils ont la même énergie ($U(u_1) = U(u_3)$, point de Maxwell). Ces points ont des expressions analytiques

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{1}{3} \arctan \sqrt{\frac{4}{27\eta^2} - 1} + \frac{\pi}{6} \right), \\ u_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{1}{3} \arctan \sqrt{\frac{4}{27\eta^2} - 1} - \frac{\pi}{6} \right), \\ u_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arctan \sqrt{\frac{4}{27\eta^2} - 1} \right). \end{aligned}$$

Notez que $1/\sqrt{3} \leq |u_{1,3}| \leq 1$ et $-1/\sqrt{3} \leq u_2 \leq 1/\sqrt{3}$. Pour $\eta \ll 1$ nous avons au premier ordre en η :

$$\begin{aligned} u_1 &\approx -1 + \eta/2, \\ u_2 &\approx -\eta, \\ u_3 &\approx 1 + \eta/2. \end{aligned}$$

Nous étudions les solutions stationnaires du système (1.1) ($\partial_t u = 0$) qui obéissent à l'équation

$$\eta + u - u^3 + u_{xx} = 0. \quad (1.5)$$

Nous pouvons voir cette équation comme l'équation de Newton d'un système mécanique, où x joue le rôle du temps, alors u_{xx} est l'accélération et ce système est potentiel, c'est-à-dire,

$$u_{xx} = -\partial_u V(u)$$

avec un potentiel qui est l'opposé de celui-ci donné en (1.3) (voir figures (1.3) et (1.5))

$$V(u) = -U(u).$$

Nous pouvons intégrer cette équation une fois pour obtenir une première constante du mouvement que nous identifions comme l'énergie mécanique de l'équation de Newton.

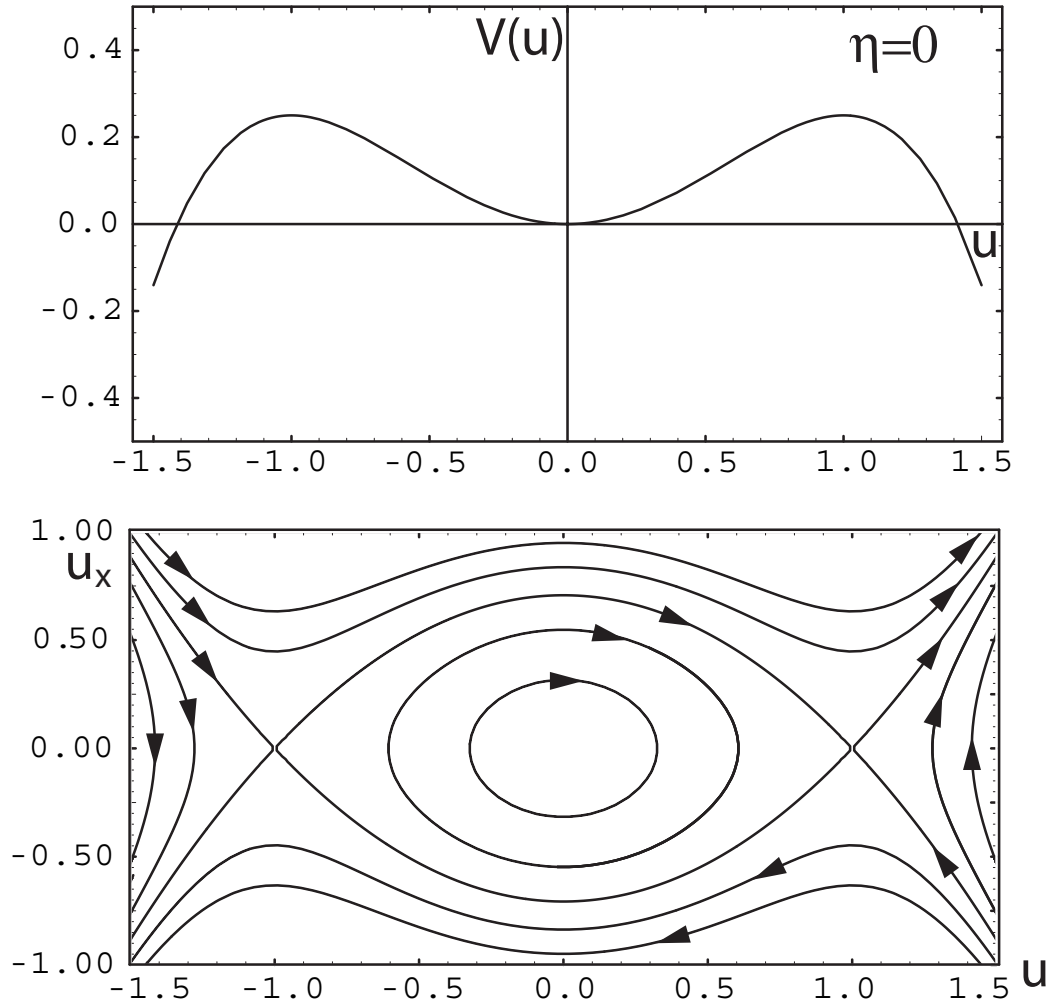


FIG. 1.3: Les graphiques du potentiel $V(u)$ et de l'espace de phase pour $\eta = 0$.

Nous avons alors

$$E = V(u) + \frac{1}{2}u_x^2.$$

Nous étudions le système de Newton pour les deux cas : $\eta = 0$ et $\eta \neq 0$.

Pour $\eta = 0$ (point de Maxwell), la figure (1.3) montre le graphique du potentiel $V(u)$ et l'espace de phase pour $\eta = 0$, les points maxima sont au même niveau d'énergie et nous voyons dans l'espace de phase la connexion hétérocline qui lie ces deux points-là (voir aussi figure (1.4)). À l'intérieur il y a les solutions périodiques et à l'extérieur les trajectoires vont à l'infini. En résolvant l'équation (1.4), nous avons que : $u_1 = -1$, $u_2 = 0$ et $u_3 = 1$. La connexion hétérocline entre les points u_1 et u_3 donnée par la solution de l'équation (1.5) est

$$u_h(x) = \tanh \frac{x}{\sqrt{2}}. \quad (1.6)$$

Le graphique de cette solution représenté figure (1.4), connecte le point $u_1 = -1$ qui est en $x \rightarrow -\infty$, avec le point $u_3 = +1$ qui est en $x \rightarrow +\infty$, en passant par l'axe horizontal en $x = x_0$, que nous appelons le cœur du front.

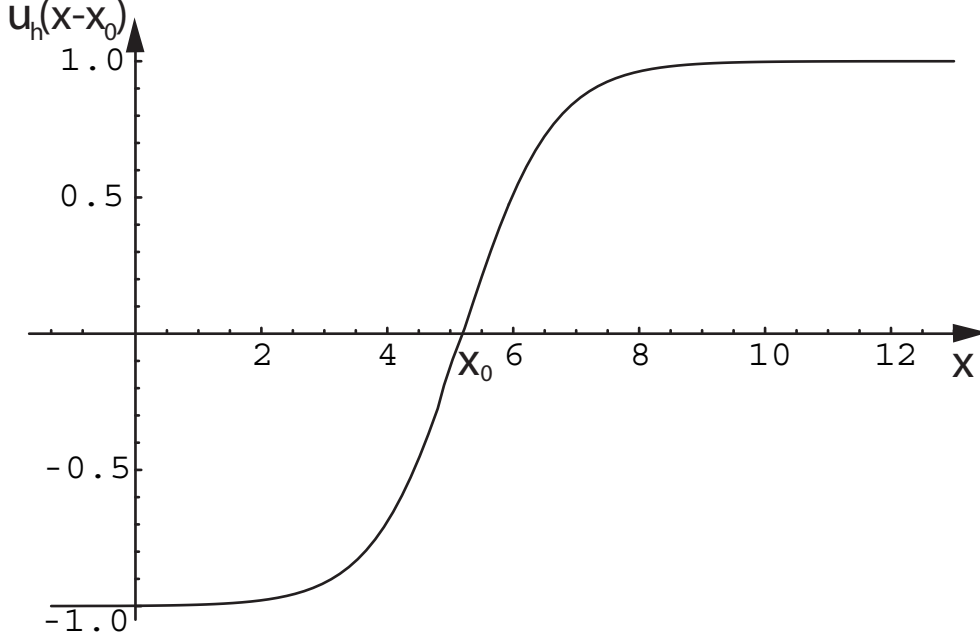


FIG. 1.4: La solution hétérocline (1.6) qui est aussi représentée dans la figure (1.3).

Le système est invariant par translation spatiale donc $u_h(x - x_0)$ est solution pour $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitraire.

Pour $\eta \neq 0$: dans la figure (1.5) on trouve les graphiques du potentiel $V(u)$ et de l'espace de phase pour $\eta \neq 0$. Nous pouvons voir que la connexion hétérocline entre u_1 et u_3 n'existe plus, dans ce cas-là, u_h n'est plus une solution stationnaire du système et le front commence à se déplacer avec une vitesse que nous allons calculer. À la place de cette solution il y a une homocline qui, dans le cas de la figure (1.5), connecte la solution u_1 avec elle-même. À l'intérieur de l'homocline il y a les solutions périodiques et à l'extérieur les solutions qui vont à l'infini. Soit une solution proche à la solution hétérocline

$$u(x, t) = u_h(x - x_0(t)) + w(x, t),$$

où w est un terme de correction qui varie lentement avec le temps. Nous remplaçons cette solution dans l'équation (1.1)

$$\partial_t(u_h(x - x_0) + w) = \eta + u_h(x - x_0) + w - (u_h(x - x_0) + w)^3 + \partial_{xx}(u_h(x - x_0) + w)$$

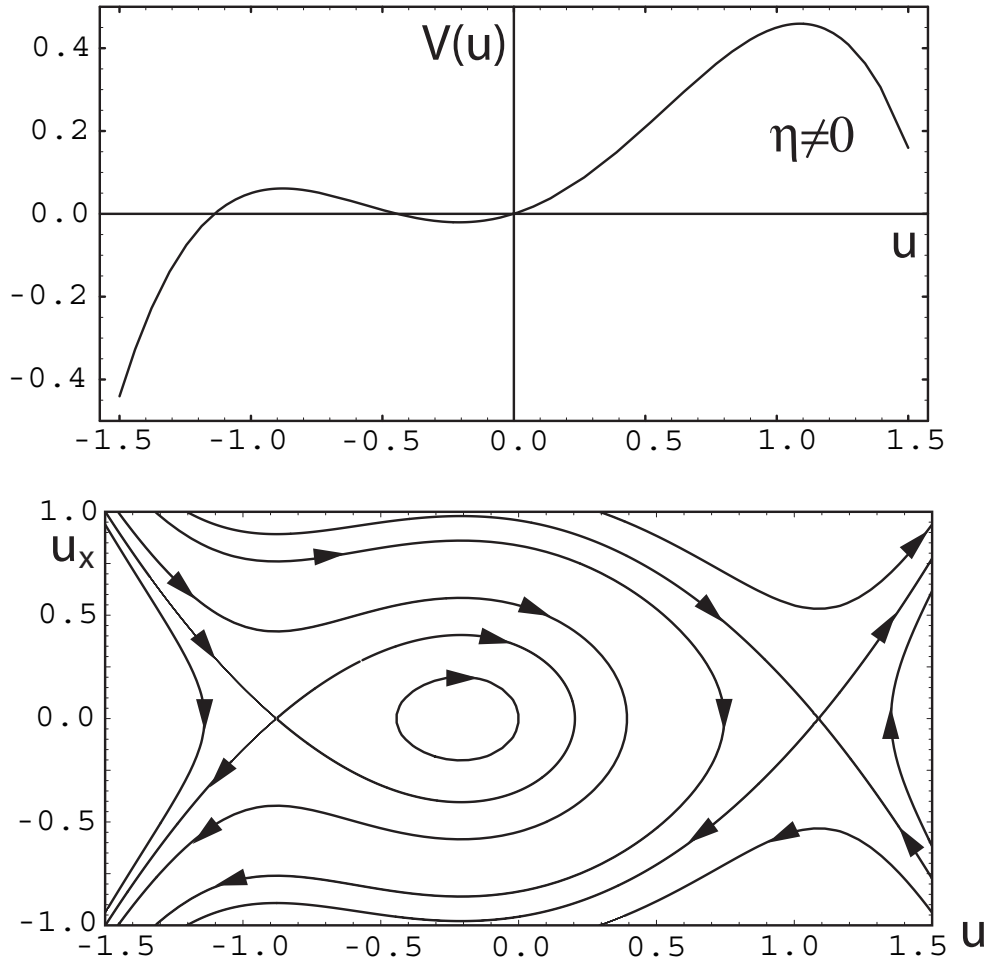


FIG. 1.5: Les graphiques du potentiel $V(u)$ et de l'espace de phase pour $\eta \neq 0$.

$$-\partial_x u_h \dot{x}_0 + \underbrace{\dot{w}}_{\mathcal{O}(w^2)} = \eta + \underbrace{u_h - u_h^3 + \partial_{xx} u_h}_{=0} + (1 - 3u_h^2 + \partial_{xx})w + \mathcal{O}(w^2). \quad (1.7)$$

Soit

$$\mathcal{L} \equiv 1 - 3u_h^2 + \partial_{xx}$$

et

$$b \equiv -\eta - \partial_x u_h \dot{x}_0,$$

alors, nous voyons que l'équation (1.7) peut être écrite comme

$$\mathcal{L}w = b. \quad (1.8)$$

La condition de solvabilité implique que, pour que cette équation ait une solution, b doit appartenir à l'image de l'opérateur \mathcal{L} , $b \in \text{Im} \mathcal{L}$, qui est équivalent à b orthogonal au

noyau de l'adjoint de \mathcal{L}

$$b \perp \text{Ker} \mathcal{L}^\dagger.$$

Nous pouvons voir facilement que si $b \in \text{Im} \mathcal{L} \implies b \perp \text{Ker} \mathcal{L}^\dagger$, soit $v \in \text{Ker} \mathcal{L}^\dagger$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur lequel est défini l'adjoint, alors

$$\langle b, v \rangle = \langle \mathcal{L}w, v \rangle = \langle w, \mathcal{L}^\dagger v \rangle = 0.$$

Prouver l'inverse est plus compliqué et nous laissons au lecteur intéressé le soin de le découvrir.

Maintenant, nous avons besoin d'un vecteur de $\text{Ker} \mathcal{L}^\dagger$. La fonction $\partial_x u_h$ est un vecteur propre de l'opérateur \mathcal{L} avec valeur propre zéro. Pour le prouver nous prenons l'équation (1.5), u_h est solution de cette équation, alors

$$\eta + u_h - u_h^3 + \partial_{xx} u_h = 0.$$

Nous dérivons cette équation par rapport à x et nous obtenons

$$\partial_x u_h - 3u_h^2 \partial_x u_h + \partial_{xxx} u_h = 0$$

$$(1 - 3u_h^2 + \partial_{xx}) \partial_x u_h = 0$$

$$\mathcal{L} \partial_x u_h = 0.$$

Comme cet opérateur est hermitique ($\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$) pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) g(x) dx, \tag{1.9}$$

alors $\mathcal{L}^\dagger \partial_x u_h = 0$, c'est-à-dire, $\partial_x u_h \in \text{Ker} \mathcal{L}^\dagger$. Nous utilisons ce vecteur de $\text{Ker} \mathcal{L}^\dagger$ et le produit scalaire (1.9) sur l'équation (1.8) pour éliminer la dépendance en w et obtenir ainsi la vitesse du front,

$$\langle \mathcal{L}w, \partial_x u_h \rangle = \langle b, \partial_x u_h \rangle$$

$$\langle b, \partial_x u_h \rangle = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u_h)^2 dx \dot{x}_0 = -\eta \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x u_h dx.$$

Mais $\partial_x u_h = \text{sech}^2(x/\sqrt{2})/\sqrt{2} = (1 - \tanh^2(x/\sqrt{2}))/\sqrt{2} = (1 - u_h^2)/\sqrt{2}$, et en faisant le changement de variable $u_h = \tanh(x/\sqrt{2})$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 (1 - u_h^2) du_h \dot{x}_0 = -\eta \int_{-1}^1 du_h$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \dot{x}_0 = -2\eta.$$

Nous arrivons finalement à obtenir la vitesse du front en fonction du paramètre η

$$\dot{x}_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\eta$$

Nous voyons que si $\eta > 0$ le front va vers la gauche, c'est-à-dire, la solution $u(x) = u_3$ envahit tout l'espace parce que c'est la solution la plus stable, si $\eta < 0$, la solution $u(x) = u_1$ est la plus stable, le front va vers la droite et cette solution envahit tout l'espace. Uniquement pour $\eta = 0$ (point de Maxwell) où les deux solutions ont la même énergie, le front est stationnaire.

1.2.2 Deuxième Exemple

Soit un système décrit par l'équation

$$\partial_t u = u - u^3 + u_{xx} + \nu \sin kx. \quad (1.10)$$

Pour $\nu = 0$, l'équation (1.10) a l'invariance par translation spatiale, $x \rightarrow x + x_0$. Pour $\nu \neq 0$, cette symétrie est brisée et nous allons voir les effets de cette brisure de symétrie dans le fait que tous les points de l'espace ne seront pas équivalents. Il y aura des points spéciaux (points fixes) liés au nombre d'onde de la perturbation. Pour $\nu = 0$, nous savons, grâce à l'exemple précédent (équation (1.6)), que u_h est une solution stationnaire du système, mais pour $\nu \neq 0$ u_h n'est plus solution du système (1.10) et nous devons essayer à nouveau la solution

$$u(x, t) = u_h(x - x_0(t)) + w(x, t),$$

dans l'équation (1.10). Nous avons

$$\partial_t(u_h(x - x_0) + w) = u_h(x - x_0) + w - (u_h(x - x_0) + w)^3 + \partial_{xx}(u_h(x - x_0) + w) + \nu \sin kx$$

$$-\partial_x u_h \dot{x}_0 + \dot{w} = u_h - u_h^3 + \partial_{xx} u_h + (1 - 3u_h^2 + \partial_{xx})w + \nu \sin kx + \mathcal{O}(w^2),$$

et ainsi nous obtenons le nouveau système auquel nous allons appliquer la condition de solvabilité,

$$\mathcal{L}w = -\partial_x u_h \dot{x}_0 - \nu \sin kx.$$

$\partial_x u_h$ est encore un vecteur du noyau de \mathcal{L}^\dagger . En multipliant par ce vecteur l'équation précédente, nous obtenons une condition pour la vitesse du front

$$\langle \mathcal{L}w, \partial_x u_h \rangle = \langle -\partial_x u_h \dot{x}_0 - \nu \sin kx, \partial_x u_h \rangle = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u_h)^2 dx \dot{x}_0 = -\nu \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x u_h \sin kx dx,$$

nous avons vu que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u_h)^2 dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad (1.11)$$

Nous calculons l'autre intégrale en effectuant le changement de variable $z = x - x_0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x u_h(x - x_0) \sin kx dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_z u_h(z) \sin k(z + x_0) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_z u_h(z) (\sin kz \cos kx_0 + \cos kz \sin kx_0) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_z u_h(z) \cos kz \sin kx_0 dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(z/\sqrt{2}) \cos kz dz \sin kx_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} k\pi \text{cosech} \frac{k\pi}{2\sqrt{2}} \text{sech} \frac{k\pi}{2\sqrt{2}} \sin kx_0. \end{aligned}$$

Soit en utilisant (1.11), nous trouvons que l'expression de la vitesse du front s'écrit

$$\dot{x}_0 = -\frac{3}{4} \nu k\pi \text{cosech} \frac{k\pi}{2\sqrt{2}} \text{sech} \frac{k\pi}{2\sqrt{2}} \sin kx_0.$$

Pour simplifier la notation nous définissons une nouvelle fonction qui dépend du nombre d'onde k , soit

$$C(k) \equiv \frac{3}{4} k\pi \text{cosech} \frac{k\pi}{2\sqrt{2}} \text{sech} \frac{k\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Cette nouvelle fonction est toujours positive et paire, ainsi nous pouvons enfin écrire le résultat de la vitesse du front d'une manière simple

$$\dot{x}_0 = -\nu C(k) \sin kx_0$$

L'équation précédente a une infinité de points stationnaires ($\dot{x}_0 = 0$, vitesse nulle) qui satisfont

$$\begin{aligned} \sin kx_0 &= 0, \\ x_n &= \frac{n\pi}{k}, \end{aligned}$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Nous étudions la stabilité de x_n . Soit ε une perturbation de la solution $x(t) = x_n$, nous remplaçons

$$x(t) = x_n + \varepsilon,$$

dans l'équation pour la vitesse du front

$$\dot{\varepsilon} = -\nu C(k) \sin k(x_n + \varepsilon)$$

$$\dot{\varepsilon} = -(\nu C(k) \cos n\pi) k \varepsilon$$

$$\dot{\varepsilon} = (-1)^{n+1} \nu C(k) k \varepsilon.$$

Comme $C(k) k > 0$, alors si n est pair x_n est un point stationnaire stable et si n est impair x_n est un point stationnaire instable. La figure (1.6) montre le graphique de la vitesse du front et les points stationnaires stables et instables. Nous voyons que le front va aller vers le point stable le plus proche. Alors nous aurons le front stationnaire et fixé sur un point fixe stable.

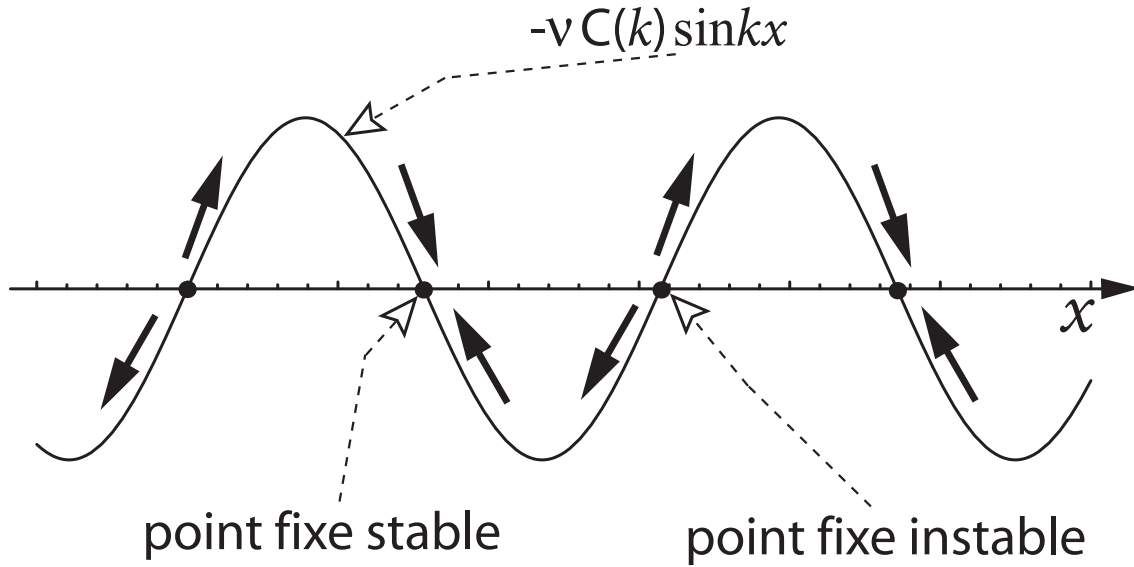


FIG. 1.6: Vitesse du front : les points d'intersection avec l'axe sont des points fixes et les flèches indiquent la direction d'évolution du front.

1.2.3 Troisième Exemple

Des deux exemples précédents, nous pouvons obtenir facilement, en faisant le même calcul, que pour le système

$$\partial_t u = \eta + u - u^3 + u_{xx} + \nu \sin kx,$$

la vitesse du front est donnée par

$$\dot{x}_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \eta - \nu C(k) \sin kx_0.$$

Pour avoir un front stationnaire ($\dot{x}_0 = 0$), nous résolvons l'équation

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2}\eta - \nu C(k) \sin kx_0 = 0$$

$$\sin kx_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{2C(k)} \frac{\eta}{\nu}.$$

Cette expression montre que la condition pour avoir des solutions stationnaires, c'est-à-dire pour que le front ne se déplace pas, est

$$\left| \frac{3\sqrt{2}}{2C(k)} \frac{\eta}{\nu} \right| \leq 1.$$

Nous définissons la valeur critique du paramètre η à partir de cette inégalité, ce qui nous donne :

$$\eta_c \equiv \frac{\sqrt{2}C(k)\nu}{3},$$

et en faisant le changement de variable $z \equiv kx_0$, l'équation de la vitesse du front s'écrit

$$\dot{z} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}k(\eta + \eta_c \sin z).$$

L'intégrale de cette équation donne

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\eta + \eta_c \sin z} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}k \int_0^t dt.$$

Par simplicité et sans perdre de généralité, nous choisissons $z_0 = -\arctan(\eta_c/\eta)$.

Si $|\eta| > \eta_c$ (voir [1] page 78)

$$\frac{2}{\sqrt{\eta^2 - \eta_c^2}} \arctan \left[\frac{\eta \tan \left[\frac{z}{2} \right] + \eta_c}{\sqrt{\eta^2 - \eta_c^2}} \right] = \frac{3\sqrt{2}}{2}kt,$$

alors

$$\eta \tan \left[\frac{kx_0}{2} \right] = -\sqrt{\eta^2 - \eta_c^2} \tan \left[\frac{3\sqrt{2}}{4} \sqrt{\eta^2 - \eta_c^2} kt \right] - \eta_c. \quad (1.12)$$

De l'équation (1.12), nous avons deux fonctions périodiques, soit λ et τ les périodes spatiale et temporelle respectivement, c'est-à-dire

$$\frac{k\lambda}{2} = 2\pi \quad \text{et} \quad \frac{3\sqrt{2}}{4} \sqrt{\eta^2 - \eta_c^2} k\tau = 2\pi,$$

et la vitesse moyenne du front est

$$\langle \dot{x}_0 \rangle = -\frac{\lambda}{\tau}$$

$$\langle \dot{x}_0 \rangle = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \sqrt{\eta^2 - \eta_c^2}.$$

Si le paramètre η est négatif, nous voyons à partir de (1.12) que la vitesse doit être positive. De cette dernière relation, nous concluons que la vitesse moyenne du front, en fonction des paramètres η et η_c est

$$\langle \dot{x}_0 \rangle = \begin{cases} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \eta \sqrt{1 - (\eta_c/\eta)^2} & \text{si } |\eta| > \eta_c \\ 0 & \text{si } |\eta| \leq \eta_c \end{cases}.$$

Nous voyons que la vitesse moyenne du front est nulle dans une région finie de l'espace des paramètres. L'extension de cet intervalle dépend de la structure périodique du système, c'est-à-dire de k .

1.3 Les Effets Non-Adiabatiques

Maintenant, nous allons voir le cas général de bifurcation sous-critique avec un nombre d'onde donné par l'analyse linéaire. La forme normale résultante a des solutions front de Pomeau mais elles ne sont stationnaires qu'au point de Maxwell. Pour comprendre l'effet de l'accrochage, nous allons ajouter tous les termes non résonants qui respectent les symétries du problème original. Les calculs vont être plus complexes que ceux des exemples précédents, mais la procédure va être la même et le résultat très semblable à celui du dernier exemple.

Soit le problème physique

$$\partial_t \underline{u} = \underline{F}(\underline{u}, \partial_x) \quad , \quad \underline{F}(\underline{u}^{(0)}, \partial_x) = 0$$

avec l'invariance $x \rightarrow -x$, où $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une fonction qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}$ et de l'espace $x \in \mathbb{R}$. Nous cherchons une solution de la forme

$$\underline{u} = \underline{u}^{(0)} + (A e^{ikx} + \bar{A} e^{-ikx}) \underline{\psi}.$$

Le nombre d'onde k sera fixé par l'analyse de stabilité linéaire où l'on suppose qu'on trouve une bifurcation sous-critique qui donne pour A (A est complexe) l'équation

$$\partial_t A = \tilde{\mu} A + \tilde{\nu} A |A|^2 - A |A|^4 + A_{xx}.$$

La bifurcation sera telle que dans la linéarisation autour de $\underline{u}^{(0)}$ on trouve une valeur propre qui passe par 0 avec 2 vecteurs propres (dû à l'invariance $x \rightarrow -x$ du problème initial) à la valeur critique k_c du vecteur d'onde. Appelons k le nombre d'onde critique k_c .

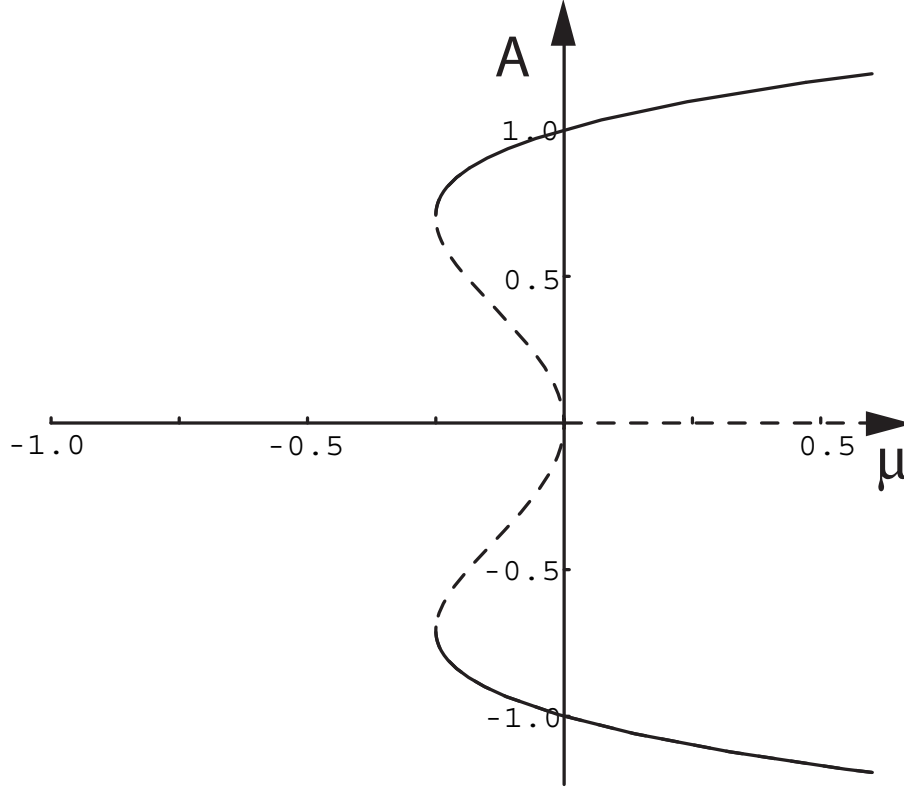


FIG. 1.7: Le diagramme de bifurcation sous-critique, la ligne continue montre les solutions stables et la ligne pointillée les solutions instables.

Le paramètre de bifurcation est ici $\tilde{\mu}$ et la figure (1.7), représente le diagramme de bifurcation sous-critique en fonction de ce paramètre-là. Nous effectuerons les calculs pour ce paramètre dans la région de bistabilité.

La forme normale a l'invariance $A \rightarrow Ae^{i\alpha}$, $\alpha = \text{const.}$, qui est faussée dans le problème original. En fait, nous pouvons calculer la vraie invariance que l'on doit imposer. Nous voyons que si $x \rightarrow x - \alpha/k$ alors $A \rightarrow Ae^{i\alpha}$.

Les termes que l'on peut rajouter à la forme normale sont du type

$$\lambda_{pq} A^p \bar{A}^q e^{i\Omega x}$$

$$\partial_t A = \tilde{\mu} A + \tilde{\nu} A |A|^2 - A |A|^4 + A_{xx} + \sum_{p,q} \lambda_{pq} A^p \bar{A}^q e^{i\Omega x}. \quad (1.13)$$

L'équation (1.13) est invariante par

$$\begin{cases} x \rightarrow x - \alpha/k \\ A \rightarrow A(x, t)e^{i\alpha} \end{cases}$$

si

$$\Omega = k(p - q - 1).$$

Nous étudions donc les équations avec $\tilde{\mu} = -\mu < 0$, et $\mu < \tilde{\nu}^2/4$ (région de bistabilité). La forme normale avec les termes non résonants qui respectent la symétrie du problème original est

$$\partial_t A = -\mu A + \tilde{\nu} A |A|^2 - A |A|^4 + A_{xx} + \sum_{p,q} \lambda_{pq} A^p \bar{A}^q e^{i(p-q-1)kx}. \quad (1.14)$$

En renormalisant les variables

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \lambda A'(x', t') \\ x &= \sigma x' \\ t &= \rho t' \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \rho &= 1/\mu \\ \lambda &= \sqrt[4]{\mu} \\ \sigma &= 1/\sqrt{\mu} \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$A(x, t) = \mu^{1/4} A'(x', t') \quad ; \quad x = x'/\sqrt{\mu} \quad ; \quad t = t'/\mu ,$$

l'équation (1.14) devient ($\nu = \tilde{\nu}/\sqrt{\mu}$)

$$\partial_t A' = -A' + \nu A' |A'|^2 - A' |A'|^4 + A'_{xx} + \sum_{p,q} \mu^{\frac{1}{4}(p-q-5)} \lambda_{pq} A'^p \bar{A}'^q e^{i(p-q-1)kx'/\sqrt{\mu}}. \quad (1.15)$$

Soit $\sigma(p, q) \equiv \lambda_{pq} \mu^{\frac{1}{4}(p-q-5)}$. Dorénavant, nous supprimons les primes. L'équation (1.15) sans le dernier terme (i.e. $\sigma(p, q) = 0$) a des solutions fronts. Si nous sommes sur le point de Maxwell, il y a un front stationnaire que nous pouvons écrire en forme polaire de la manière suivante

$$A = R_0(x - x_0)e^{i\theta_0} \quad ; \quad x_0 = \text{const} \quad ; \quad \theta_0 = \text{const} \quad (1.16)$$

quand $\nu = \nu_M$ (point de Maxwell), où x_0 est la constante d'intégration liée à l'invariance par translation spatiale et θ_0 est la constante d'intégration liée à l'invariance de phase. L'expression (1.16) est donc solution de

$$\partial_t A = -A + \nu_M A |A|^2 - A |A|^4 + A_{xx} \quad \nu_M = 4/\sqrt{3}$$

ce qui entraîne pour $R_0(x - x_0)$ l'équation

$$-R_0 + \nu_M R_0^3 - R_0^5 + \partial_{xx} R_0 = 0. \quad (1.17)$$

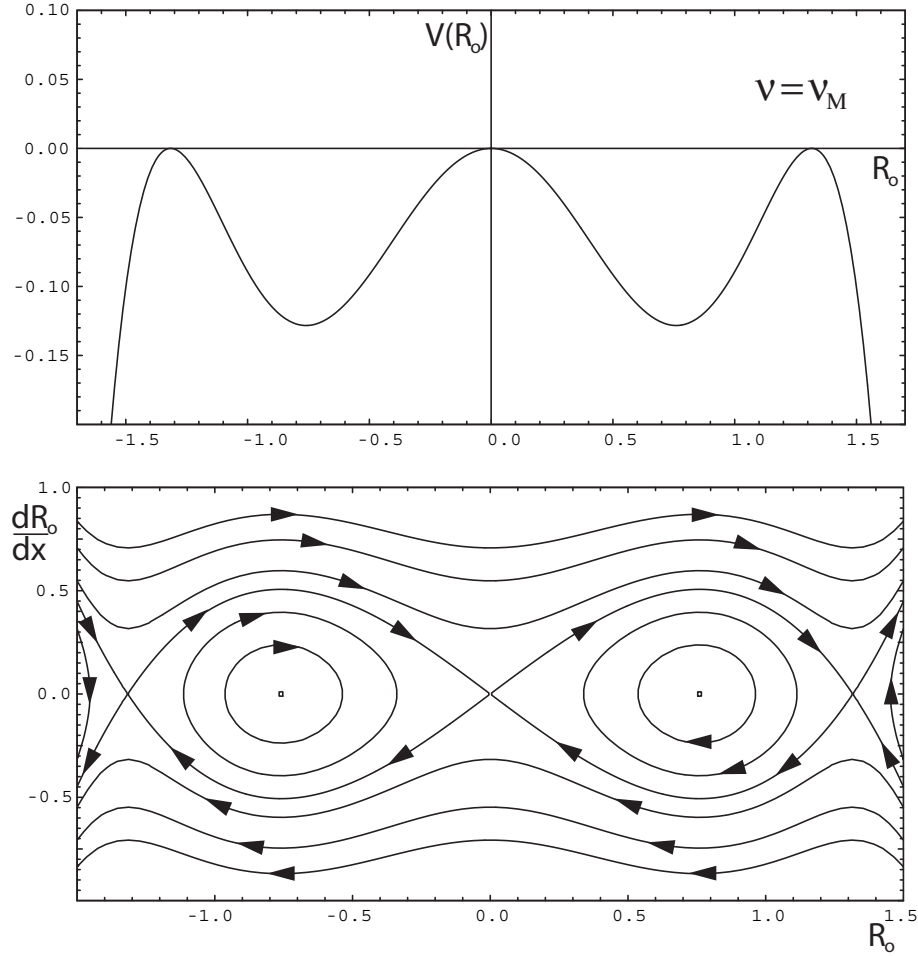


FIG. 1.8: Le graphique du potentiel $V(R_0)$ et de l'espace de phase du système dynamique.

L'équation (1.17) décrit un système potentiel avec un potentiel qui est un polynôme d'ordre six (figure (1.8)), alors cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \partial_{xx} R_0 &= -\frac{\partial V(R_0)}{\partial R_0} \\ V(R_0) &= -\frac{1}{2}R_0^2 + \frac{1}{4}R_0^4 - \frac{1}{6}R_0^6 \end{cases}$$

La figure (1.8) montre le potentiel $V(R_0)$ et l'espace de phase pour ce système dynamique, il y a deux orbites hétéroclines, une qui connecte le point fixe $(-3^{1/4}, 0)$ avec le point fixe

$(0,0)$ et l'autre connecte le point fixe $(0,0)$ avec le point fixe $(+3^{1/4}, 0)$, à l'intérieur de ces orbites hétéroclines il y a les orbites périodiques et à l'extérieur des trajectoires qui vont à l'infini.

Les fronts vont de 0 à A, ou de A à 0, ou de A' à 0, etc. Le front qui va de 0 à $+3^{1/4}$ est (on prend $\theta_0 = 0$) par exemple (voir figure (1.9)) :

$$A = R_0(x - x_0) = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{1 + e^{-2(x-x_0)}}} \quad (1.18)$$

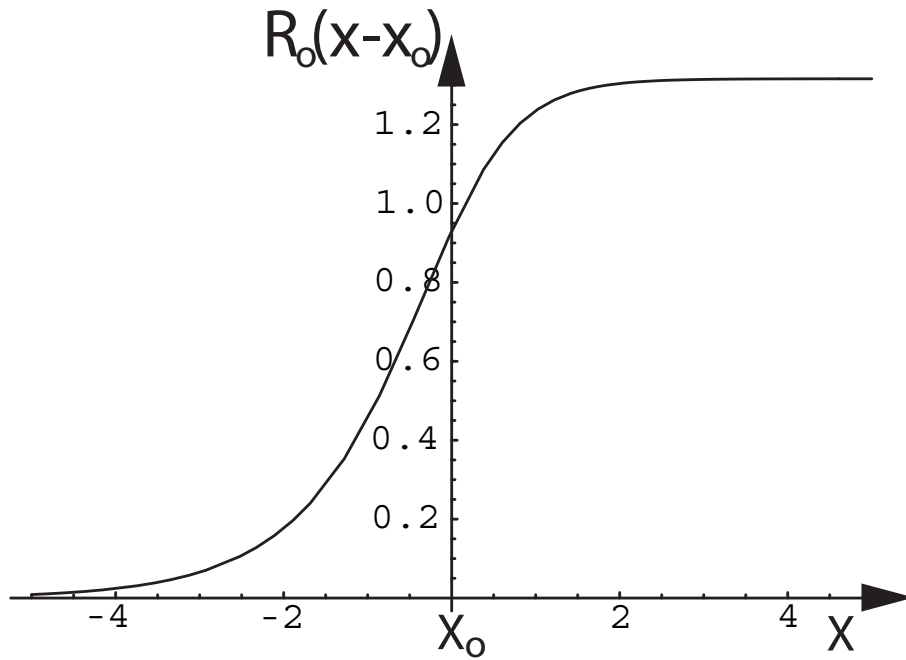


FIG. 1.9: Le graphique de la solution stationnaire $R_0(x - x_0)$.

Nous avons vu que les solutions front sont les connexions hétéroclines entre deux points fixes de l'espace de phase. Nous n'allons pas le montrer, mais dans l'équation (1.15) avec $\sigma(p, q) = 0$, il y a aussi des solutions homoclines qui sont les connexions d'un point fixe avec lui-même et ces solutions homoclines représentent des structures localisées. Elles peuvent être modélisées comme l'interaction entre deux fronts [35, 36, 54] et on peut étudier la dynamique de l'interaction entre ces structures localisées [8, 20, 80].

Nous revenons à l'équation (1.15) à laquelle on rajoute un terme $\sigma(p, q) A^p \bar{A}^q e^{i(p-q-1)kx'/\sqrt{\mu}}$, avec $\nu = \nu_M + \delta\nu$ et l'on considère les termes en $\delta\nu$ et en $\sigma(p, q) = \tilde{\sigma}$ comme des perturbations :

$$\partial_t A = -A + \nu_M A |A|^2 - A |A|^4 + A_{xx} + \underbrace{\delta \nu A |A|^2 + \tilde{\sigma} A^p \bar{A}^q e^{i(p-q-1)kx'/\sqrt{\mu}}}_{\text{perturbation}}. \quad (1.19)$$

Nous allons considérer des solutions de la forme suivante

$$A = [R_0(x - x_0(t)) + \varepsilon \rho] e^{i\varepsilon \theta_1} \quad (1.20)$$

où $(\varepsilon \rho, \varepsilon \theta_1)$ sont des petits termes, et $x_0(t)$ une fonction de t (le front se déplace). Dans le dernier terme que l'on considère comme une perturbation, on remplace $A = R_0(x - x_0(t))$. Nous obtenons ainsi

$$\delta \nu A |A|^2 + \tilde{\sigma} A^p \bar{A}^q e^{i(p-q-1)kx/\sqrt{\mu}} \Big|_{A=R_0} = \delta \nu R_0^3 + \tilde{\sigma} R_0^{p+q} e^{i(p-q-1)kx/\sqrt{\mu}}$$

Nous écrivons la première partie de l'équation (1.19), i.e. $\partial_t A = -A + \nu_M A |A|^2 - A |A|^4 + A_{xx}$ en posant $A = R e^{i\theta}$. On obtient

$$\begin{cases} \partial_t R &= (-R + \nu_M R^3 - R^5 + R_{xx}) - R \theta_x^2, \\ R \partial_t \theta &= 2R_x \theta_x + R \theta_{xx}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Si l'on multiplie la dernière équation par R , nous obtenons

$$R^2 \partial_t \theta = \frac{\partial}{\partial x} (R^2 \theta_x).$$

En reportant les solutions (1.20) dans (1.19) et en tenant compte que $-R_0 + \nu_M R_0^3 - R_0^5 + \partial_{xx} R_0 = 0$ on obtient à l'ordre ε

$$\partial_t R_0(x - x_0(t)) + \varepsilon \partial_t \rho = (-1 + 3\nu_M R^2 - 5R^4 + \partial_{xx}) \varepsilon \rho - R_0 \varepsilon^2 \theta_{1x}^2 + \delta \nu R_0^3 + \tilde{\sigma} R_0^{p+q} \cos((p-q-1) \frac{kx}{\sqrt{\mu}})$$

$$R_0^2 \varepsilon \partial_t \theta_1 = \frac{d}{dx} (R_0^2 \varepsilon \theta_{1x}) + \tilde{\sigma} R_0^{p+q+1} \sin((p-q-1) \frac{kx}{\sqrt{\mu}})$$

Au premier ordre en ε , nous avons donc

$$\begin{cases} -\partial_x R_0 \dot{x}_0 &= (-1 + 3\nu_M R^2 - 5R^4 + \partial_{xx}) \rho + \delta \nu R_0^3 + \tilde{\sigma} R_0^{p+q} \cos((p-q-1) \frac{kx}{\sqrt{\mu}}) \\ \frac{d}{dx} (R_0^2 \varepsilon \theta_{1x}) &= -\tilde{\sigma} R_0^{p+q+1} \sin((p-q-1) \frac{kx}{\sqrt{\mu}}) \end{cases} \quad (1.22)$$

En dérivant l'équation (1.17) par rapport à x on a

$$\underbrace{(-1 + 3\nu_M R^2 - 5R^4 + \partial_{xx})}_{\equiv \mathcal{L}} \partial_x R_0 = 0.$$

L'opérateur \mathcal{L} est un opérateur hermitique ($\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$) avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx$. Nous appliquons la condition de solvabilité sur l'équation (1.22), ce qui veut dire que nous multiplions l'équation (1.22) par $\partial_x R_0(x - x_0)$ et nous l'intégrons de $-\infty$ à $+\infty$, c'est-à-dire, nous utilisons le produit scalaire. Nous obtenons

$$-\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x R_0)^2 dx \dot{x}_0 = \langle \partial_x R_0, \mathcal{L}\rho \rangle + \delta\nu \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x R_0 R_0^3 dx + \tilde{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x R_0 R_0^{p+q} \cos((p-q-1)\frac{kx}{\sqrt{\mu}}) dx.$$

En faisant le changement de variable $x - x_0 = y$ dans la dernière intégrale de la dernière équation et en remarquant que $\langle \partial_x R_0, \mathcal{L}\rho \rangle = \langle \mathcal{L}^\dagger \partial_x R_0, \rho \rangle = 0$, nous avons l'équation pour la vitesse du front en terme des intégrales que nous allons calculer

$$\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3^{1/4} e^{-4y}}{\sqrt{1+e^{-2y}}} dy \right) \dot{x}_0 = \delta\nu \frac{R_0(y)^4}{4} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \tilde{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x R_0(y) R_0^{p+q}(y) \cos((p-q-1)k\frac{x_0+y}{\sqrt{\mu}}) dy$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} \dot{x}_0 = \frac{3}{4} \delta\nu + \tilde{\sigma} \left(\cos((p-q-1)k\frac{x_0}{\sqrt{\mu}}) \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x R_0(y) R_0^{p+q}(y) \cos((p-q-1)k\frac{y}{\sqrt{\mu}}) dy - \sin((p-q-1)k\frac{x_0}{\sqrt{\mu}}) \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x R_0(y) R_0^{p+q}(y) \sin((p-q-1)k\frac{y}{\sqrt{\mu}}) dy \right)$$

Nous arrivons enfin au résultat pour la vitesse du front

$$\dot{x}_0 = -\sqrt{3}\delta\nu - \frac{4\sqrt{3}}{3}\tilde{\sigma} \left(\mathbf{I}_1 \cos((p-q-1)k\frac{x_0}{\sqrt{\mu}}) + \mathbf{I}_2 \sin((p-q-1)k\frac{x_0}{\sqrt{\mu}}) \right) \quad (1.23)$$

avec

$$\mathbf{I} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x R_0(y) R_0^{p+q}(y) \exp(i(p-q-1)k\frac{y}{\sqrt{\mu}}) dy, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{I}_1 \equiv \text{Re} \mathbf{I} \quad \wedge \quad \mathbf{I}_2 \equiv \text{Im} \mathbf{I}.$$

Si nous arrangeons un peu l'équation (1.23) pour la vitesse du front, nous pourrions comprendre mieux ce résultat. Nous définissons alors les coordonnées polaires de l'intégrale complexe \mathbf{I}

$$\mathbf{I} \equiv r e^{-i\varphi}.$$

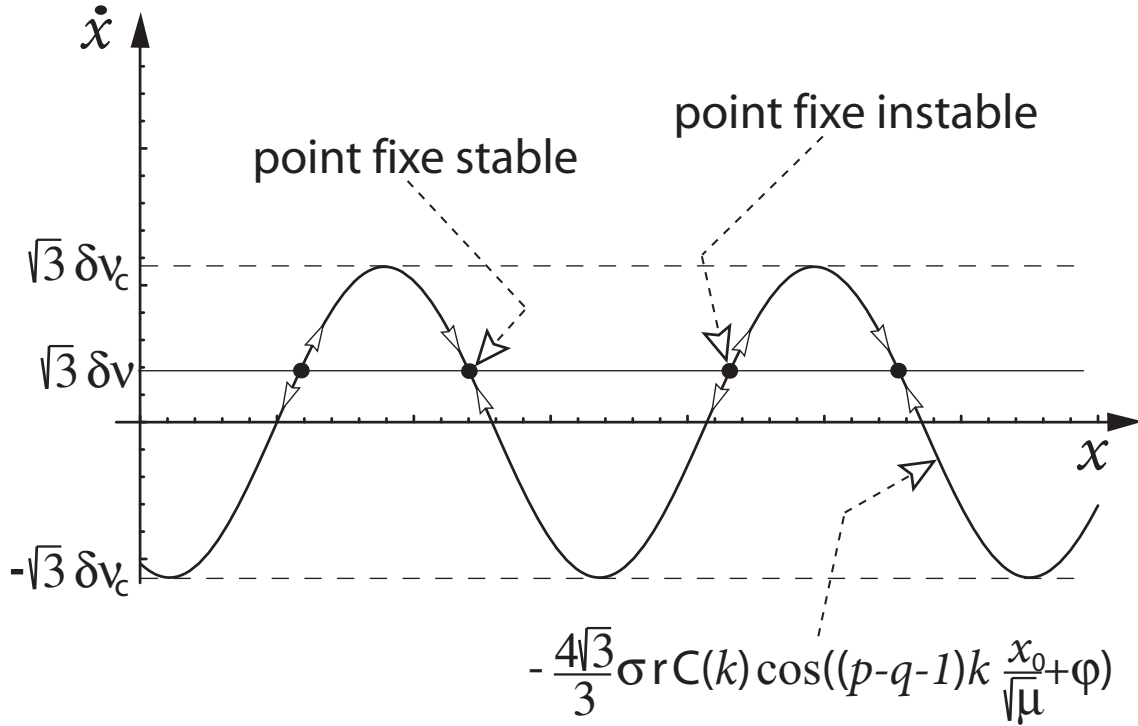


FIG. 1.10: La vitesse du front est donnée par la différence entre les deux courbes, les points d'intersection sont des points fixes et les flèches indiquent la direction d'évolution du front.

Avec cette définition, l'équation (1.23) peut être exprimée à l'aide d'une seule fonction trigonométrique

$$\dot{x}_0 = -\sqrt{3}\delta\nu - \frac{4\sqrt{3}}{3}\tilde{\sigma}r \cos((p-q-1)k \frac{x_0}{\sqrt{\mu}} + \varphi)$$

La figure (1.10) montre les deux courbes qui donnent la vitesse du front : la droite horizontale et la courbe sinusoïdale. Quand la courbe sinusoïdale est au-dessus de la droite, la vitesse du front est positive sinon elle est négative, ce qui est représenté par les flèches qui sont sur la courbe sinusoïdale. Ces flèches montrent aussi la direction d'évolution du front. Les points d'intersection sont des points fixes, c'est-à-dire, ce sont les points où la vitesse du front est nulle.

L'accrochage correspond à $\dot{x}_0 = 0$, soit

$$-\sqrt{3}\delta\nu - \frac{4\sqrt{3}}{3}\tilde{\sigma}r \cos((p-q-1)k \frac{x_0}{\sqrt{\mu}} + \varphi) = 0,$$

$$\cos((p - q - 1)k \frac{x_0}{\sqrt{\mu}} + \varphi) = -\frac{3}{4} \frac{\delta\nu}{\tilde{\sigma}r}.$$

Cette équation montre que la condition d'accrochage, c'est-à-dire telle qu'il existe des points fixes auxquels le front soit attaché, est

$$\left| \frac{3}{4} \frac{\delta\nu}{\tilde{\sigma}r} \right| \leq 1.$$

De cette inégalité, nous pouvons définir une valeur critique pour le paramètre $\delta\nu$ en fonction du paramètre $\tilde{\sigma}$

$$\delta\nu_c \equiv \frac{4}{3} \tilde{\sigma}r, \quad (1.25)$$

et deux autres nouvelles variables

$$\tilde{k} \equiv (p - q - 1) \frac{k}{\sqrt{\mu}}$$

et

$$z \equiv \tilde{k} x_0 + \varphi.$$

Avec ces changements de variables, l'équation pour la vitesse du front devient

$$\dot{z} = -\sqrt{3}(\delta\nu + \delta\nu_c \cos z).$$

Pour raison de simplicité et sans perdre de généralité, nous imposons la condition initiale $z(0) = 0$ et nous intégrons cette équation

$$\int_0^z \frac{dz}{\delta\nu + \delta\nu_c \cos z} = -\sqrt{3}\tilde{k} \int_0^t dt,$$

si $|\delta\nu| > \delta\nu_c$ [1]

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\delta\nu^2 - \delta\nu_c^2}} \arctan \left[\frac{\delta\nu - \delta\nu_c}{\sqrt{\delta\nu^2 - \delta\nu_c^2}} \tan \frac{z}{2} \right] &= -\sqrt{3}\tilde{k}t \\ \tan \frac{\tilde{k} x_0 + \varphi}{2} &= -\sqrt{\frac{\delta\nu + \delta\nu_c}{\delta\nu - \delta\nu_c}} \tan \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\delta\nu^2 - \delta\nu_c^2} \tilde{k}t \right]. \end{aligned}$$

Nous avons l'égalité entre deux fonctions périodiques, alors quand une de ces fonctions est décalée d'une période l'autre doit aussi être décalée d'une période. Soit λ la période spatiale et τ la période temporelle, c'est-à-dire :

$$\frac{\tilde{k}\lambda}{2} = 2\pi \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\delta\nu^2 - \delta\nu_c^2} \tilde{k}\tau = 2\pi,$$

la vitesse moyenne du front est donc donnée par le quotient entre λ et τ

$$\langle \dot{x}_0 \rangle = -\frac{\lambda}{\tau}$$

$$\langle \dot{x}_0 \rangle = -\sqrt{3} \sqrt{\delta\nu^2 - \delta\nu_c^2}.$$

Si $|\delta\nu| \leq \delta\nu_c$ il y a une infinité de points fixes, la période temporelle devient infinie et ainsi la vitesse moyenne du front est nulle $\langle \dot{x}_0 \rangle = 0$. Nous avons donc la vitesse moyenne du front de Pomeau pour le système dans la région de bistabilité en fonction du paramètre $\delta\nu$

$$\langle \dot{x}_0 \rangle = \begin{cases} -\sqrt{3} \delta\nu \sqrt{1 - (\delta\nu_c/\delta\nu)^2} & \text{si } |\delta\nu| > \delta\nu_c \\ 0 & \text{si } |\delta\nu| \leq \delta\nu_c \end{cases}$$

Le graphique de la figure (1.11), montre que la vitesse moyenne du front de Pomeau est nulle dans l'intervalle $[-\delta\nu_c, \delta\nu_c]$ (région d'accrochage). Nous pouvons le voir aussi dans la figure (1.10), en déplaçant la droite horizontale : il y aura des points fixes (accrochage) seulement quand elle coupe la courbe sinusoïdale, c'est-à-dire, quand $-\delta\nu_c \leq \delta\nu \leq \delta\nu_c$.

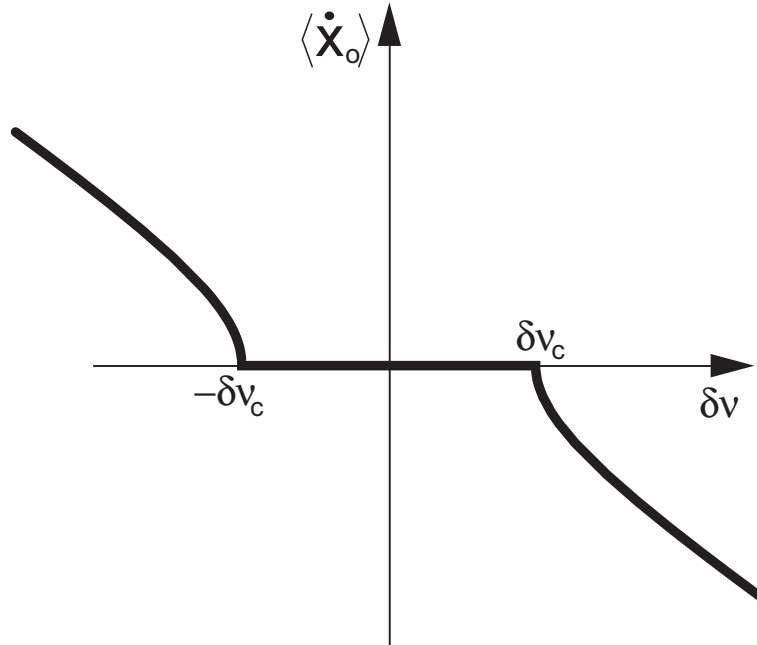


FIG. 1.11: La vitesse moyenne du front en fonction du paramètre $\delta\nu$.

1.4 Calcul des Intégrales

Pour finir le calcul de la vitesse du front, nous allons calculer l'intégrale **I**. Pour ce faire, nous allons utiliser le plan complexe et le théorème des résidus en choisissant un contour d'intégration adéquat [60, 61]. Après, nous allons calculer la phase θ_1 loin du cœur du front pour voir le comportement asymptotique du front. Pour faire ce calcul, nous allons encore avoir besoin du théorème des résidus.

Nous rappelons le théorème des résidus ainsi que quelques définitions

Définition Une fonction $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, est dite *dérivable* en $z_0 \in U$ si la limite suivante existe :

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Si la fonction est dérivable en tous points du domaine U , elle est dite *holomorphe* dans ce domaine.

Définition Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de z_0 , sauf en z_0 . Pour $r \in \mathbb{R}$ assez défini, on note C_r le cercle de centre z_0 et de rayon r . Alors

$$Res(f, z_0) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(z) dz$$

est appelé *résidu* de f en z_0 et il est indépendant de r .

Si la fonction f est holomorphe dans le domaine $U - \{z_0\}$, elle peut être représentée par sa série de Laurent, c'est-à-dire

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

où le terme $n = -1$ correspond justement au résidu de f en z_0 , $a_{-1} = Res(f, z_0)$.

Définition z_0 est un *pôle* de f si $|f(z)| \rightarrow +\infty$ quand $z \rightarrow z_0$. Et z_0 est un *pôle d'ordre* n de f si dans sa série de Laurent $a_{-n} \neq 0$ et $a_k = 0$; $\forall k < n$.

Si z_0 est un pôle d'ordre n , nous avons la formule suivante pour calculer le résidu de f en z_0 :

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

Théorème (théorème des résidus) Soit f une fonction holomorphe dans $U \subseteq \mathbb{C}$, sauf en un nombre fini de points isolés $\{z_1, \dots, z_n\}$, alors

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n Res(f, z_k)$$

où $\Gamma = \partial U$ est le contour parcouru dans le sens trigonométrique.

1.4.1 Calcul de l'intégrale \mathbf{I} de la vitesse du front

En remplaçant R_0 , donné par l'équation (1.18), dans l'équation (1.24) nous obtenons pour l'intégrale \mathbf{I} :

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3^{(p+q+1)/4} e^{-2y}}{(1 + e^{-2y})^{\frac{p+q+3}{2}}} e^{i(p-q-1)k \frac{y}{\sqrt{\mu}}} dy.$$

Pour simplifier la notation, nous définissons $n \equiv (p+q+3)/2$, $\omega \equiv (p-q-1)k$ et $\varepsilon \equiv \sqrt{\mu}$. L'intégrale \mathbf{I} s'écrit

$$\mathbf{I} = 3^{(n-1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2y}}{(1 + e^{-2y})^n} e^{i\omega y/\varepsilon} dy.$$

Nous utilisons les résidus avec le contour d'intégration de la figure (1.12), que nous appelons Γ qui dépend du valeur de L , pour calculer l'intégrale

$$\mathbf{I}_L \equiv \int_{\Gamma} \frac{e^{-2y}}{(1 + e^{-2y})^n} e^{i\omega y/\varepsilon} dy.$$

Le théorème des résidus nous dit que [61]

$$\mathbf{I}_L = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{-2y}}{(1 + e^{-2y})^n} e^{i\omega y/\varepsilon}, y = \frac{i\pi}{2} \right] = 2\pi i \left(\frac{i\omega}{2\varepsilon} \right)^{n-1} \frac{P_{n-2}(\frac{i\varepsilon}{\omega})}{2(n-1)!} e^{-\omega\pi/2\varepsilon} \quad (1.26)$$

où P_n est un polynôme d'ordre n donné par le calcul des résidus et $P_n(0) = 1$. Comme le calcul est fait près du point de bifurcation, $\varepsilon = \sqrt{\mu}$ est petit alors nous n'avons pas besoin de calculer le polynôme P_n explicitement parce que nous avons déjà le terme dominant.

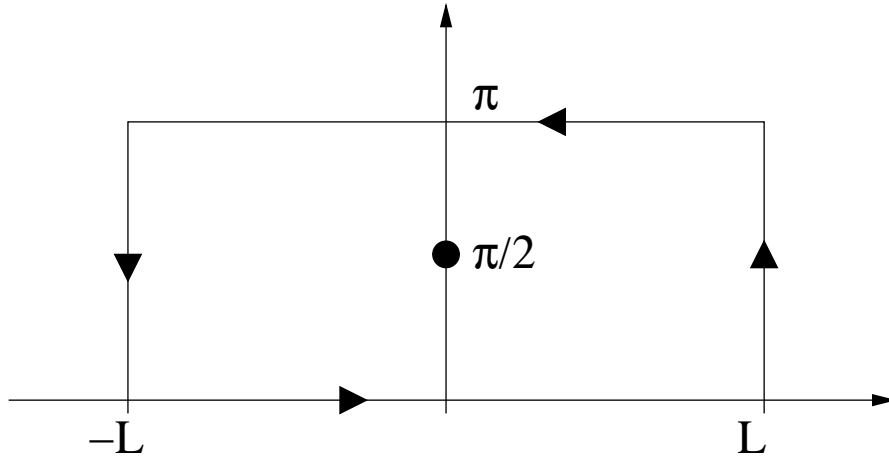


FIG. 1.12: Le contour d'intégration pour l'intégrale \mathbf{I} ; à l'intérieur il y a un pôle pour $y = i\pi/2$.

L'intégrale \mathbf{I}_L est composée de quatre intervalles donnés par le contour d'intégration de

la figure (1.12). Les première et troisième intégrales sont liées à l'intégrale **I**. Les deuxième et quatrième intégrales vont s'annuler quand $L \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_L &= \int_{-L}^L \frac{e^{-2y+i\omega y/\varepsilon}}{(1+e^{-2y})^n} dy + \int_L^{L+i\pi} \frac{e^{-2y+i\omega y/\varepsilon}}{(1+e^{-2y})^n} dy + \int_{L+i\pi}^{-L+i\pi} \frac{e^{-2y+i\omega y/\varepsilon}}{(1+e^{-2y})^n} dy + \int_{-L+i\pi}^{-L} \frac{e^{-2y+i\omega y/\varepsilon}}{(1+e^{-2y})^n} dy \\ &= \int_{-L}^L \frac{e^{-2y+i\omega y/\varepsilon}}{(1+e^{-2y})^n} dy + i \int_0^\pi \frac{e^{-2iy-\omega y/\varepsilon-2L+i\omega L/\varepsilon}}{(1+e^{-2L-2iy})^n} dy - \int_{-L}^L \frac{e^{-2y+i\omega y/\varepsilon-\omega\pi/\varepsilon}}{(1+e^{-2y})^n} dy + i \int_\pi^0 \frac{e^{-2iy-\omega y/\varepsilon+2L-i\omega L/\varepsilon}}{(1+e^{2L-2iy})^n} dy \end{aligned}$$

dans la limite $L \rightarrow \infty$, les deuxième et quatrième intégrales vont exponentiellement à zéro. En se souvenant de l'équation (1.26), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\infty &= (1 - e^{-\omega\pi/\varepsilon}) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-2y+i\omega y/\varepsilon}}{(1+e^{-2y})^n} dy = 2\pi i \left(\frac{i\omega}{2\varepsilon} \right)^{n-1} \frac{P_{n-2}\left(\frac{i\varepsilon}{\omega}\right)}{2(n-1)!} e^{-\omega\pi/2\varepsilon} \\ &\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-2y+i\omega y/\varepsilon}}{(1+e^{-2y})^n} dy = \frac{\pi e^{in\pi/2}}{2(n-1)!} \left(\frac{\omega}{2\varepsilon} \right)^{n-1} \frac{P_{n-2}\left(\frac{i\varepsilon}{\omega}\right)}{\sinh\left(\frac{\omega\pi}{2\varepsilon}\right)}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = 3^{(n-1)/2} \frac{\pi e^{in\pi/2}}{2(n-1)!} \left(\frac{\omega}{2\varepsilon} \right)^{n-1} \frac{P_{n-2}\left(\frac{i\varepsilon}{\omega}\right)}{\sinh\left(\frac{\omega\pi}{2\varepsilon}\right)}$$

Pour $n \notin \mathbb{N}$ on arrive à un résultat similaire [60]. De cette équation, nous voyons que la limite de **I**, quand ε va vers zéro, est nulle

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{I} = 0.$$

Cela montre que, près du point de bifurcation, les oscillations rapides font annuler les contributions des termes non résonants et comme le paramètre critique $\delta\nu_c$ est proportionnel au module de **I** (équation (1.25)), alors $\delta\nu_c \rightarrow 0$ quand $\mu \rightarrow 0$. Donc quand nous sommes plus près du point de bifurcation l'intervalle où la vitesse du front est nulle est plus petit (voir figure (1.11)).

1.4.2 Calcul de la Phase

Maintenant, nous voulons connaître la forme de la phase pour caractériser le front. En utilisant (1.22) nous pouvons calculer la dérivée de la phase θ_{1x} . Nous obtenons

$$R_0^2 \theta_{1x} = \tilde{\sigma} \int_{-\infty}^x R_0(x' - x_0)^{p+q+1} \sin((p-q-1) \frac{kx'}{\sqrt{\mu}}) dx'.$$

Nous allons estimer l'intégrale

$$\tilde{\mathbf{I}} = \int_{-\infty}^x R_0(x' - x_0)^{p+q+1} e^{i(p-q-1) \frac{kx'}{\sqrt{\mu}}} dx'.$$

Soit $y = x' - x_0$

$$\tilde{\mathbf{I}} = \int_{-\infty}^{x-x_0} R_0(y)^{p+q+1} e^{i(p-q-1) \frac{ky'}{\sqrt{\mu}}} dy e^{i(p-q-1) \frac{kx_0}{\sqrt{\mu}}}$$

et en remplaçant $R_0(y)$ donné par l'équation (1.18) nous avons

$$\tilde{\mathbf{I}} = \int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{3^{(p+q+1)/4}}{(1 + e^{-2y})^{(p+q+1)/2}} e^{i(p-q-1) \frac{ky'}{\sqrt{\mu}}} dy e^{i(p-q-1) \frac{kx_0}{\sqrt{\mu}}}.$$

Pour rendre la notation plus simple, nous définissons trois nouveaux paramètres dans l'intégrale. Soit $n \equiv (p+q+1)/2$, $\omega \equiv (p-q-1)k$ et $\varepsilon \equiv \sqrt{\mu}$. L'intégrale à calculer est maintenant (sans le terme constant $3^{(p+q+1)/4}$)

$$\tilde{\mathbf{I}}_1 = \int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy.$$

Nous étudions le cas $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas $n \notin \mathbb{N}$ le résultat est similaire pour la dépendance de la phase en fonction du paramètre de bifurcation μ . Nous voulons obtenir le comportement de cette phase pour $x \rightarrow +\infty$. Le théorème des résidus nous dit que

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy = 2\pi i \text{Res}$$

où $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ est le contour d'intégration donné dans la figure (1.13). Dans ce contour il y a un pôle seulement dans le cas $x > x_0$, alors si $x < x_0 \Rightarrow \text{Res} = 0$ et si $x > x_0$

$$\text{Res} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{1}{2} \left(\frac{i\omega}{2\varepsilon} \right)^{n-1} e^{-\omega\pi/2\varepsilon}. \quad (1.27)$$

L'intégrale sur le contour Γ peut être divisée en trois sous-contours (Γ_1 , Γ_2 et Γ_3), ce qui nous donne trois intégrales. Deux sont liées à l'intégrale que nous cherchons et nous allons borner la troisième,

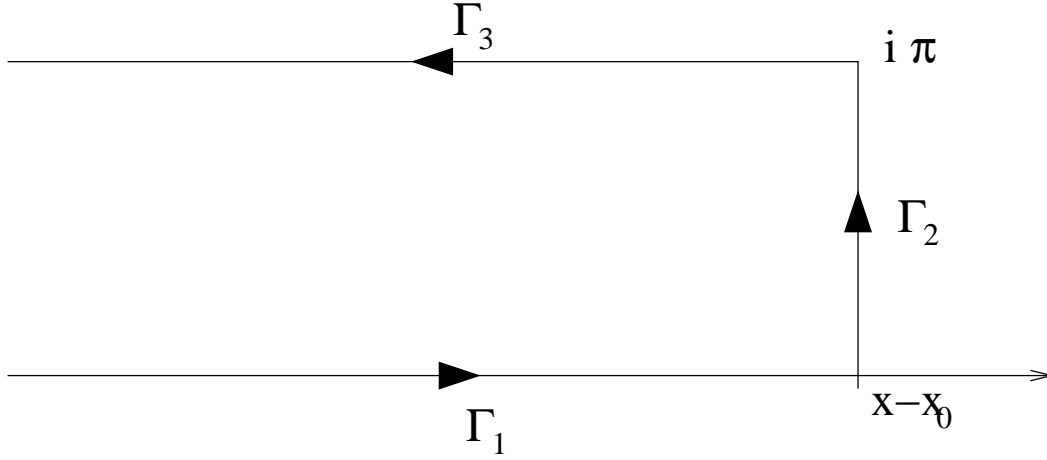


FIG. 1.13: Le contour d'intégration pour la phase.

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy = \int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy + \int_{x-x_0}^{x-x_0+i\pi} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy + \int_{x-x_0+i\pi}^{-\infty+i\pi} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy.$$

Soit les changements de variables $y = x - x_0 + iz$ dans la deuxième intégrale et $y = u + i\pi$ dans la troisième intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy &= \int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy + \int_0^{\pi} \frac{e^{-\omega z/\varepsilon} e^{-i\omega(x-x_0)/\varepsilon}}{(1 + e^{-2(x-x_0+iz)})^n} dz + \int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{e^{i\omega u/\varepsilon} e^{-\omega\pi/\varepsilon}}{(1 + e^{-2u})^n} du \\ &= (1 - e^{-\omega\pi/\varepsilon}) \int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy + ie^{-i\omega(x-x_0)/\varepsilon} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\omega z/\varepsilon}}{(1 + e^{-2(x-x_0+iz)})^n} dz \\ &= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{1}{2} \left(\frac{i\omega}{2\varepsilon} \right)^{n-1} e^{-\omega\pi/2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Cette dernière relation vient de l'équation (1.27) pour le résidu et de cette relation, nous déterminons l'intégrale qui nous intéresse

$$\int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy = - \frac{ie^{i\omega(x-x_0)/\varepsilon}}{1 - e^{-\omega\pi/\varepsilon}} \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{e^{-\omega z/\varepsilon}}{(1 + e^{-2(x-x_0+iz)})^n} dz}_{\equiv \tilde{\mathbf{I}}_2} + \frac{\pi}{2(n-1)!} \left(\frac{\omega}{2\varepsilon} \right)^{n-1} \frac{e^{in\pi/2}}{\sinh \frac{\omega\pi}{2\varepsilon}}.$$

Nous étudions l'intégrale $\tilde{\mathbf{I}}_2$

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\mathbf{I}}_2| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{-\omega z/\varepsilon}}{(1 + e^{-2(x-x_0+iz)})^n} dz \right| \\
 &\leq \int_0^\pi \frac{e^{-\omega z/\varepsilon}}{|1 + e^{-2(x-x_0+iz)}|^n} dz \\
 &= \int_0^\pi \frac{e^{-\omega z/\varepsilon}}{(1 + 2e^{-2(x-x_0)} \cos 2z + e^{-4(x-x_0)})^{n/2}} dz \\
 &\leq \int_0^\pi \frac{e^{-\omega z/\varepsilon}}{(1 - e^{-2(x-x_0)})^n} dz \\
 &= \frac{\varepsilon}{\omega} \frac{1 - e^{-\omega\pi/\varepsilon}}{(1 - e^{-2(x-x_0)})^n}.
 \end{aligned}$$

Nous constatons que l'intégrale $\tilde{\mathbf{I}}_2$ est bornée par une fonction décroissante de x . Nous étudions le comportement à l'infini, $x - x_0 \rightarrow +\infty$, pour voir comment la phase varie loin du cœur du front. La limite $x - x_0 \rightarrow -\infty$ n'est pas intéressante parce que l'amplitude va vers zéro, alors, dans cette limite le front va vers une solution homogène. Dans la limite $x - x_0 \rightarrow +\infty$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{e^{i\omega y/\varepsilon}}{(1 + e^{-2y})^n} dy \simeq i \frac{\varepsilon}{\omega} e^{i\omega(x-x_0)/\varepsilon} + \frac{\pi}{2(n-1)!} \left(\frac{\omega}{2\varepsilon} \right)^{n-1} \frac{e^{in\pi/2}}{\sinh \frac{\omega\pi}{2\varepsilon}},$$

et en revenant à l'intégrale $\tilde{\mathbf{I}}$, elle est approximativement

$$\tilde{\mathbf{I}} \simeq 3^{\frac{p+q+1}{4}} \left[\frac{-i\sqrt{\mu}\tilde{\sigma}}{(p-q-1)k} e^{i(p-q-1)\frac{kx}{\sqrt{\mu}}} + \frac{\pi\tilde{\sigma}}{2(\frac{p+q+1}{2})!} \left(\frac{p-q-1}{2\sqrt{\mu}} \right)^{\frac{p+q-1}{2}} \frac{e^{i\frac{p+q+1}{4}\pi}}{\sinh \frac{(p-q-1)k\pi}{2\sqrt{\mu}}} e^{i(p-q-1)\frac{kx_0}{\sqrt{\mu}}} \right].$$

Loin du cœur du front l'amplitude R_0 a un comportement constant, pour $x - x_0 \rightarrow +\infty$, $R_0 \rightarrow 3^{1/4}$, alors, la dérivée de la phase, loin du cœur du front, est

$$\theta_{1x} \simeq 3^{\frac{p+q-1}{4}} \tilde{\sigma} \left[\frac{-\sqrt{\mu} \cos \left((p-q-1)\frac{kx}{\sqrt{\mu}} \right)}{(p-q-1)k} + \pi \left(\frac{p-q-1}{2\sqrt{\mu}} \right)^{\frac{p+q-1}{2}} \frac{\sin \left((p-q-1)\frac{kx_0}{\sqrt{\mu}} + \frac{p+q+1}{4}\pi \right)}{2(\frac{p+q+1}{2})! \sinh \frac{(p-q-1)k\pi}{2\sqrt{\mu}}} \right].$$

Nous intégrons cette relation par rapport à l'espace, ce qui nous donne

$$\theta_1 \simeq 3^{\frac{p+q-1}{4}} \tilde{\sigma} \left[\frac{-\mu \sin \left((p-q-1)\frac{kx}{\sqrt{\mu}} \right)}{(p-q-1)^2 k^2} + \pi x \left(\frac{p-q-1}{2\sqrt{\mu}} \right)^{\frac{p+q-1}{2}} \frac{\sin \left((p-q-1)\frac{kx_0}{\sqrt{\mu}} + \frac{p+q+1}{4}\pi \right)}{2(\frac{p+q+1}{2})! \sinh \frac{(p-q-1)k\pi}{2\sqrt{\mu}}} \right].$$

De cette dernière équation, le deuxième terme est dominant, et la phase a donc un comportement linéaire loin du cœur du front :

$$\theta_1 \simeq \frac{\pi \tilde{\sigma} x}{2(\frac{p+q+1}{2})!} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p-q-1}{\sqrt{\mu}} \right)^{\frac{p+q-1}{2}} \frac{\sin \left((p-q-1) \frac{kx_0}{\sqrt{\mu}} + \frac{p+q+1}{4} \pi \right)}{\sinh \frac{(p-q-1)k\pi}{2\sqrt{\mu}}}$$

Cela veut dire que le front présente un comportement oscillatoire loin du cœur du front (front de Pomeau, voir figure (1.1)). Nous voyons aussi que près du point de bifurcation, c'est-à-dire, quand $\mu \rightarrow 0$, la phase va vers une valeur constante, parce que la pente de la fonction linéaire qui décrit la phase va vers zéro, ce qui veut dire que quand on s'approche du point de bifurcation, la longueur d'onde du front de Pomeau augmente et à la limite tend vers l'infini. Le front de Pomeau devient alors un front simple qui connecte deux états homogènes.

2 Une Goutte qui tombe dans un Fluide plus dense

2.1 Introduction

Il y a une infinité de phénomènes physiques simples à réaliser qui ne nécessitent qu'un modeste équipement et qui n'ont pas encore de solutions. La physique des fluides est une grande source de ce type de phénomènes [63, 90]. Ici, nous présentons un exemple simple et facile à réaliser : déposez une goutte de lait à la surface de l'eau et observez la formation d'un anneau (anneau de vorticité [81, 83]) qui se brise ensuite en petites gouttes qui vont développer à nouveau des anneaux. Thomson et Newall[88] ont fait cette expérience et un siècle plus tard Chen et Chang[27] l'ont refaite, puis Arecchi et al.[5, 6, 7]. La vaste littérature sur cette expérience montre que, bien que simple, elle n'est pas encore complètement comprise [26, 79, 83].

Jusqu'à présent, toutes les expériences ont été faites dans le cas de différences de densité positive entre la goutte et le solvant, c'est à dire, la goutte est plus dense que le solvant. Nous considérons le cas de différences de densité négatives qui n'a jamais été étudié [18]. Nous montrons que, même si la goutte est moins dense que le solvant, elle descend jusqu'à une hauteur finie. Initialement la goutte subit une forte impulsion vers l'intérieur du solvant à cause de la conversion de l'énergie de tension de surface en énergie cinétique [4]. Cette forte injection induit une instabilité type Kelvin- Helmholtz [24, 52, 55] (instabilité de l'interface entre deux fluides superposés avec une vitesse horizontale relative) en créant un anneau de vorticité qui s'élargit et avance jusqu'à s'arrêter par dissipation visqueuse. Quand l'anneau s'arrête, une nouvelle instabilité apparaît du type Rayleigh-Taylor [24, 73, 87] (deux fluides superposés de différentes densités) qui amène à la fragmentation de l'anneau en petites gouttes. Si la différence de densité est positive les petites gouttes continuent à descendre, mais si la différence de densité est négative elles commencent à remonter à la surface.

Nous décrivons la dynamique de la goutte avec un modèle simple, qui prend en compte la force d'Archimède, la dissipation visqueuse (loi de Stokes), et la transformation initiale d'énergie de tension superficielle en énergie cinétique. Nous faisons la comparaison entre ce modèle et les résultats des expériences. Finalement, nous décrivons l'interaction entre les anneaux de vorticité dus aux petites gouttes, et la surface du solvant.

Nous allons tout d'abord rappeler les mécanismes des instabilités hydrodynamiques de Kelvin-Helmholtz et de Rayleigh-Taylor pour mieux comprendre le phénomène de la goutte qui tombe dans un fluide plus dense.

2.2 Instabilités Hydrodynamiques

Les équations qui gouvernent l'hydrodynamique sont intrinsèquement non linéaires et compliquées à résoudre, et en général on peut le faire seulement à l'aide d'un ordinateur. Cependant ces équations ont quelques solutions simples comme par exemple : il existe la solution interface plane entre deux fluides même si le système est vibré verticalement (instabilité de Faraday [22, 23, 40, 46, 80]), ou si les deux fluides ont des vitesses différentes (instabilité de Kelvin-Helmholtz [52, 55]), ou si le fluide du haut est plus lourd que celui du bas (instabilité de Rayleigh-Taylor [73, 87]); il existe la solution champ de vitesse stationnaire pour un fluide entre deux cylindres coaxiaux qui tournent autour de leur axe (instabilité de Couette-Taylor [53]); il existe la solution champ de vitesse nulle pour un fluide entre deux plaques à différentes températures (instabilité de Rayleigh-Bénard [19, 48, 74]), ou même si on chauffe la face inférieure d'une couche mince de liquide, dont la surface supérieure est libre (instabilité de Bénard-Marangoni [19, 50]). Toutes ces solutions, bien que toujours mathématiquement valables, ne sont expérimentalement visibles seulement dans une région de l'espace de paramètres. En effet, en dehors de cette région, une petite perturbation à cette solution va faire basculer le système vers une autre solution. En général, celle-ci est plus complexe et on dit que la solution initiale est instable dans cette région. L'étude de ces régions de stabilité et d'instabilité, est le premier pas pour comprendre les instabilités hydrodynamiques et c'est ce que nous allons faire avec les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor.

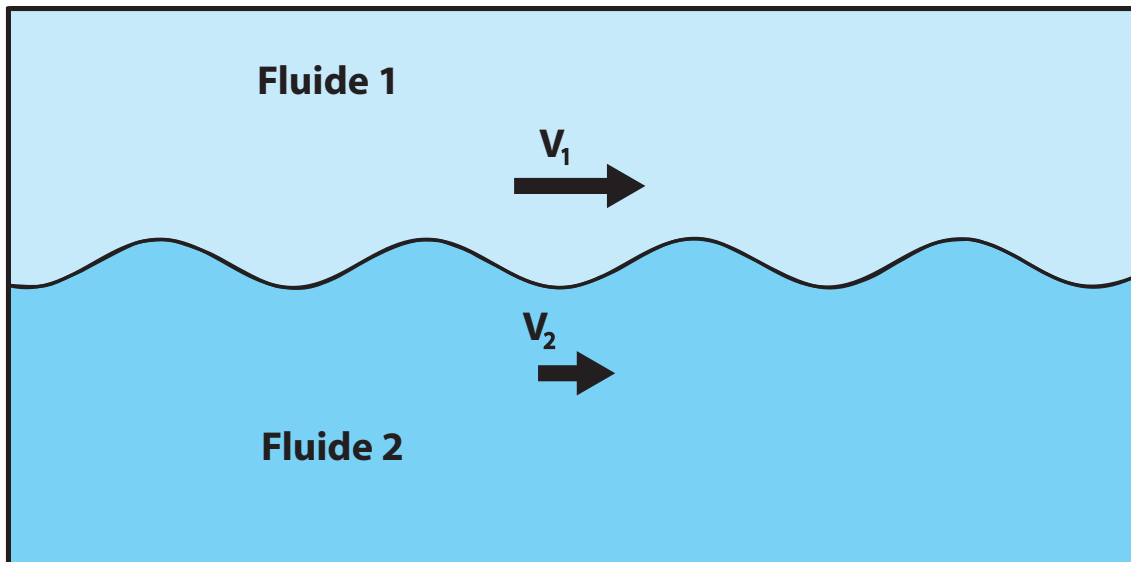


FIG. 2.1: L'instabilité de Kelvin-Helmholtz

2.2.1 Instabilité de Kelvin- Helmholtz

Nous allons étudier l'instabilité de l'interface entre deux fluides superposés avec des vitesses différentes. Soit V_1 et V_2 la vitesse du fluide 1 et du fluide 2, respectivement, dans la direction x , comme on voit sur la figure (2.1) et ρ_1, ρ_2 leurs densités. Nous négligeons les effet de viscosité. Nous supposons que l'instabilité est bidimensionnelle, caractérisée par la hauteur de l'interface $z = \xi(x, t)$ et $z = 0$ est la solution non perturbée. Nous supposons aussi que les deux fluides sont incompressibles $\nabla \cdot v = 0$, et potentiels $\nabla \times v = 0$, alors la vitesse peut s'écrire comme le gradient d'un potentiel scalaire Φ

$$\vec{v}_i = \nabla [V_i x + \Phi_i(x, z, t)] \quad i = 1, 2$$

où $V_i x$ sont les potentiels des vitesses de l'écoulement non perturbé. Φ_i sont les parties des potentiels dues à la perturbation. Nous allons chercher des relations entre ces potentiels perturbés et l'amplitude des perturbations $z = \xi(x, t)$. Pour cela, nous allons utiliser la condition aux limites qui dit que les composantes normales des vitesses de deux fluides à l'interface doivent être égales

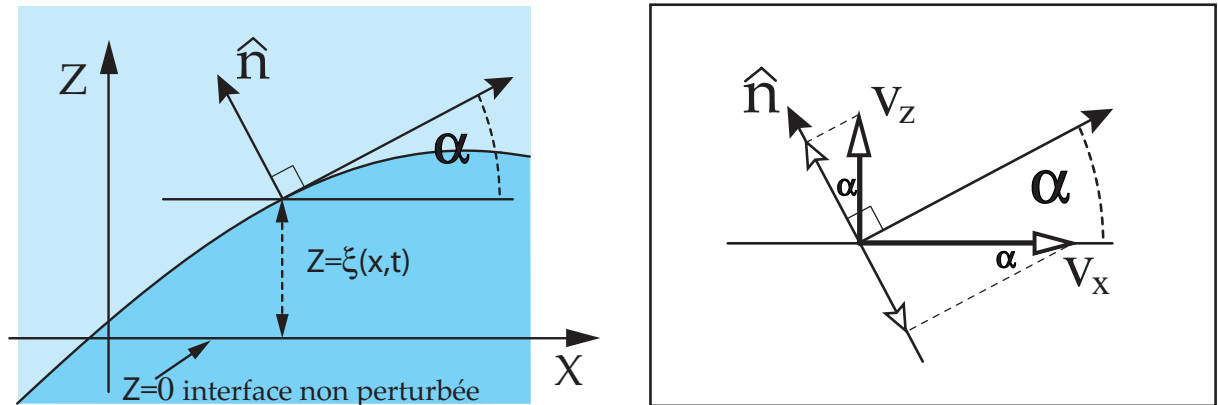


FIG. 2.2: L'angle α représente la pente locale de l'interface et à droite on a représenté la projection des composantes de la vitesse sur la normale à l'interface.

$$\vec{v}_1 \cdot \hat{n}|_{z=\xi} = \vec{v}_2 \cdot \hat{n}|_{z=\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \cos \alpha,$$

\hat{n} est la normale à l'interface et α est l'angle entre la tangente et l'horizontale comme on le voit sur la figure (2.2). La projection de la vitesse sur la normale à l'interface nous donne

$$\vec{v}_i \cdot \hat{n} = v_{i,z} \cos \alpha - v_{i,x} \sin \alpha$$

où $v_{i,x}$ et $v_{i,z}$ sont les composantes x et z de la vitesse du fluide i ($i = 1, 2$).

De ces deux dernières équations nous avons

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_{i,z} - v_{i,x} \tan \alpha,$$

mais nous savons que $\tan \alpha = \partial \xi / \partial x$, $v_{i,z} = \partial \Phi_i / \partial z$ et $v_{i,x} \simeq V_i$, ce qui nous donne deux relations entre les potentiels Φ_i et l'amplitude des perturbations ξ

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_2 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Mais ce n'est pas suffisant, nous avons besoin d'une troisième relation qui va résulter de l'équation de Bernoulli

$$p_i + \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \rho_i g z + \frac{1}{2} \rho_i v_i^2 = C_i \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

où p_i est la pression, ρ_i la densité et C_i est une constante liée au fluide i ($i = 1, 2$). Pour utiliser cette équation nous devons connaître les quantités C_i , v_i^2 et p_i .

Nous obtenons la valeur de la constante C_i de la solution non perturbée, ce qui nous donne

$$C_i = \frac{1}{2} \rho_i V_i^2. \quad (2.4)$$

Pour les v_i^2 , nous les écrivons en fonction des potentiels

$$\begin{aligned} v_i &= \left(V_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right) \hat{x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \hat{z} \\ v_i^2 &= V_i^2 + 2V_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right)^2 \\ v_i^2 &\simeq V_i^2 + 2V_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pour calculer la différence entre les pressions p_1 et p_2 dans l'équation de Bernoulli, nous utilisons la loi de Laplace

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)$$

où R et R' sont les rayons de courbure principaux de l'interface au point considéré, et γ est le coefficient de tension superficielle. Comme nous considérons seulement des perturbations dans la direction de l'axe x alors $R' = \infty$ et nous supposons que l'amplitude

des perturbations est petite, alors

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

ce qui nous donne, pour la différence de pression entre les deux fluides à l'interface,

$$p_1 - p_2 = \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (2.6)$$

En reportant les équations (2.4), (2.5) et (2.6) dans l'équation de Bernoulli (2.3) nous obtenons la troisième relation cherchée

$$\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (\rho_1 - \rho_2) g z + \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - V_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0. \quad (2.7)$$

Comme les fluides sont incompressibles $\nabla \cdot v_i = 0$, les potentiels doivent satisfaire l'équation de Laplace $\nabla^2 \Phi_i = 0$. Si nous supposons que le potentiel peut être écrit comme un produit d'une fonction dépendant seulement de x et l'autre de z , c'est-à-dire

$$\Phi_i = f(x) g(z) h(t),$$

nous avons

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(z)}{g(z)} = -k^2,$$

soit, $f(x) = \exp ikx$ et $g(z) = \exp \pm kz$. Pour la partie temporelle, nous cherchons les modes de Fourier $h(t) = \exp i\omega t$ de la perturbation,

$$\Phi_1 = A_1 e^{i(kx + \omega t) - kz}$$

$$\Phi_2 = A_2 e^{i(kx + \omega t) + kz},$$

les signes « - » et « + » assurent que à $\pm\infty$ les potentiels s'annulent, et donc loin de l'interface, le champ de vitesse est celui du système non perturbé. L'amplitude de la perturbation de l'interface doit avoir une dépendance similaire aux potentiels,

$$\xi = A_3 e^{i(kx + \omega t)}.$$

En reportant les expressions de Φ_1 , Φ_2 et ξ dans les équations (2.1), (2.2) et (2.7), nous obtenons un système d'équations pour les A_i . Soit la matrice M et le vecteur \vec{c} ,

$$M \equiv \begin{pmatrix} -i\rho_1(\omega + V_1 k) & i\rho_2(\omega + V_2 k) & (\rho_2 - \rho_1) g + \gamma k^2 \\ -ik & 0 & \omega + V_1 k \\ 0 & ik & \omega + V_2 k \end{pmatrix}; \quad c \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

alors le système s'écrit $M\vec{c} = 0$, et pour que ce système ait des solutions non triviales, nous devons imposer la condition $\det M = 0$, ce qui nous donne la relation de dispersion

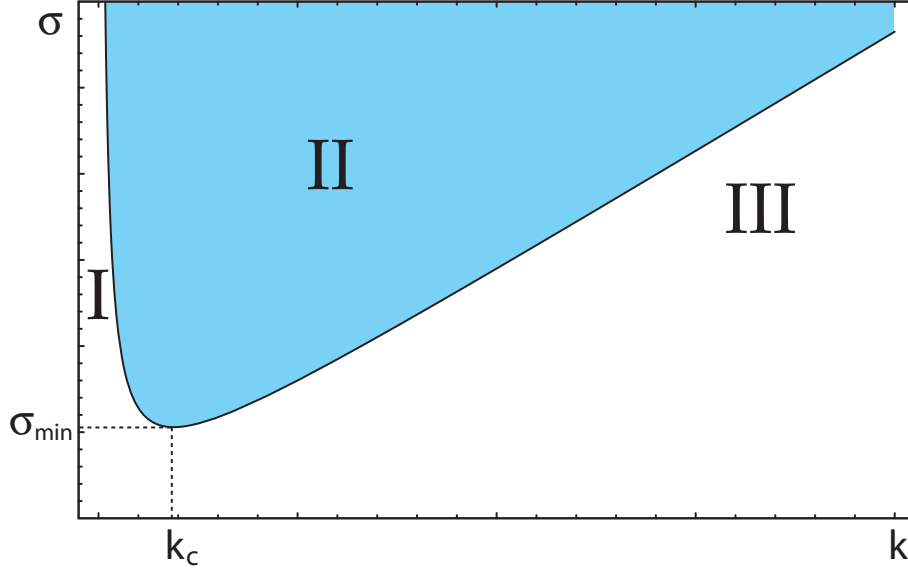


FIG. 2.3: Domaine de stabilité : la région I est le domaine d'existence d'ondes contrôlées par la gravité, la région II est le domaine d'instabilité et la région III est le domaine d'existence d'ondes contrôlées par la tension de surface.

cherchée

$$k [\rho_1(\omega + V_1 k)^2 + \rho_2(\omega + V_2 k)^2 - (\rho_2 - \rho_1) g k - \gamma k^3] = 0.$$

En développant cette relation nous avons, pour $k \neq 0$

$$\frac{\omega^2}{k^2} + 2 \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{\omega}{k} + \frac{\rho_1 V_1^2 + \rho_2 V_2^2}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{k} - \frac{\gamma k}{\rho_1 + \rho_2} = 0.$$

Nous résolvons cette équation pour ω/k

$$\frac{\omega}{k} = -\frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2 (V_1 - V_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}}. \quad (2.8)$$

De cette dernière relation nous obtenons a condition pour avoir des instabilités

$$\frac{\rho_1 \rho_2 (V_1 - V_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \geq \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho_1 + \rho_2}.$$

En définissant la fonction

$$\sigma(k) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho_1 + \rho_2},$$

nous voyons que cette fonction a un minimum pour

$$k_c = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{\gamma}},$$

et la valeur minimale de cette fonction est

$$\sigma_{min} = \sigma(k_c) = 2 \frac{\sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g\gamma}}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Finalement, en utilisant l'expression de k_c , notre condition d'instabilité devient

$$(V_1 - V_2)^2 \geq 2 \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g\gamma}.$$

Le domaine de stabilité est représenté dans la figure (2.3) : à l'intérieur de la région II le système est instable, à l'extérieur de cette région les ondes de perturbation se propagent sous la forme d'ondes qui sont contrôlées par la gravité (région I) ou par la tension de surface (région III). Près du nombre d'onde critique k_c , les effets de la gravité et de la tension de surface sont du même ordre de grandeur. L'amplitude des ondes dans les régions I et II sont décroissantes exponentiellement avec le temps si on prend en compte l'effet de la viscosité.

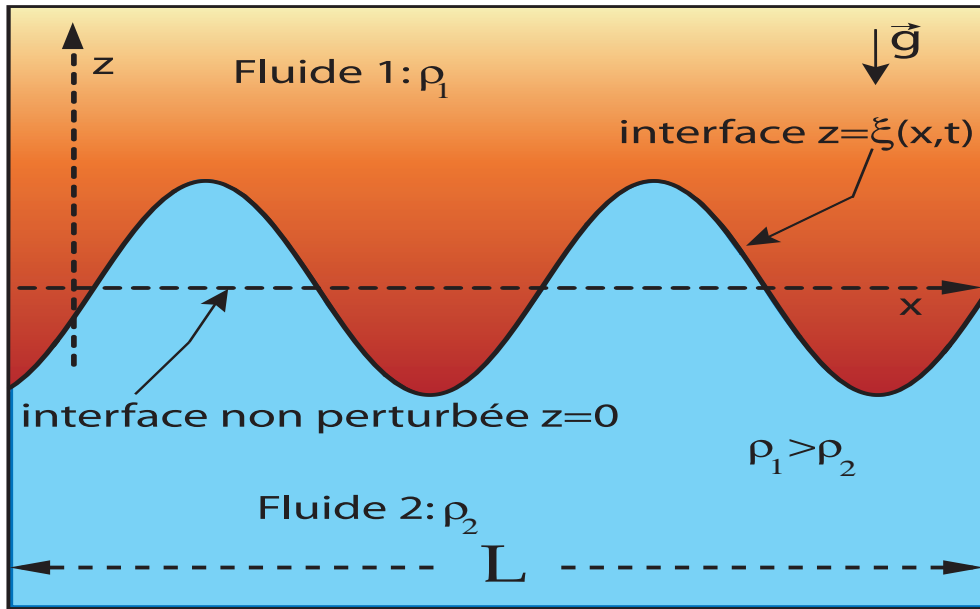


FIG. 2.4: L'instabilité de Rayleigh-Taylor

2.2.2 Instabilité de Rayleigh-Taylor

Nous étudions dans ce paragraphe l'instabilité de l'interface entre deux fluides de différentes densités, le plus dense étant placé au-dessus de l'autre, comme représenté dans la figure (2.4) [73, 84, 87].

Le calcul que nous avons fait pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz reste valable pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor, mais avec les conditions

$$V_1 = V_2 = V; \quad \text{et} \quad \rho_1 > \rho_2; \quad \Delta\rho \equiv \rho_1 - \rho_2.$$

Dans ce cas, la relation de dispersion que nous avons obtenue dans la section précédente (équation (2.8)), s'écrit

$$\frac{\omega}{k} = -V \pm \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\Delta\rho}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{k}}.$$

Afin que le système soit instable, il faut que le terme à l'intérieur de la racine carrée soit négatif, ce qui nous donne le nombre d'onde critique

$$k_c = \sqrt{\frac{\Delta\rho g}{\gamma}}.$$

Ce nombre d'onde définit une longueur critique pour les perturbations du système,

$$L_c = \frac{2\pi}{k_c},$$

$$L_c = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{\Delta\rho g}},$$

et seules les perturbations de longueur d'onde plus grande que la longueur critique vont s'amplifier, les autres vont être contrôlées par la tension de surface. Si le système a une taille finie $L > L_c$, alors l'interface va être instable à cause de la gravité et si $L < L_c$ l'interface va être stabilisée grâce à la tension superficielle.

Si ρ_2 est la densité de l'air, alors $\rho_2 \ll \rho_1$ et $\Delta\rho \simeq \rho_1 \equiv \rho$, de sorte que la longueur critique peut s'écrire $L_c = 2\pi l_c$, où $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ correspond à la *longueur capillaire* du fluide.

Dans le cas où le fluide le plus lourd est une couche fine, on peut obtenir une solution exacte et si la perturbation initiale est sinusoïdale, la forme évolue vers celle d'une cycloïde [67].

Une très belle expérience, montrant la richesse de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, a été développée à l'INLN. Elle montre la déstabilisation d'un film d'huile de silicone sous un plan horizontal poreux continûment alimenté [68, 69].

2.3 Montage Expérimental et Traitement de Données

Le montage expérimental, représenté figure (2.5), consiste en un récipient transparent rectangulaire de base $10 \times 10 \text{ cm}^2$ et de hauteur 40 cm , monté sur un support métallique rigide. Le solvant est un mélange d'eau distillée avec glycérine à 25% et la goutte est aussi un mélange d'eau distillée avec glycérine en concentration comprise entre 0 et 25%. La goutte se forme à la sortie de l'aiguille d'une micro seringue de Hamilton de haute précision dont le volume peut varier de 1 à $10 \mu\text{l}$. Une fois formée, la goutte est déposée adiabaticquement, au moyen d'une plate-forme de transfert micrométrique, sur la surface du solvant. La vue latérale et inférieure de la goutte dans le solvant est enregistrée au moyen d'une caméra CCD (Charge Coupled Device) avec l'éclairage d'un laser ($\lambda = 532 \text{ nm}$). La goutte est légèrement dopée avec de la fluorescéine pour la visualiser.

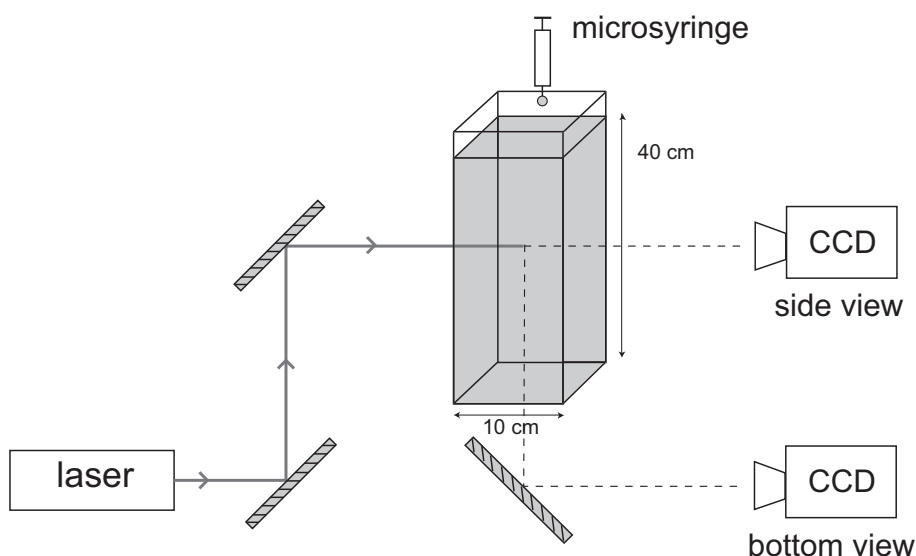


FIG. 2.5: Montage expérimental : un laser ($\lambda = 532 \text{ nm}$) illumine latéralement le récipient transparent ; la goutte est enregistrée par une caméra CCD.

Nous réalisons plusieurs expériences en changeant le volume des gouttes et la différence de densité entre la goutte et le solvant. Pour chaque ensemble d'expériences nous enregistrons plusieurs films en suivant l'évolution de la goutte et pour chaque enregistrement nous suivons le procédé suivant. Nous transformons toutes les images d'un film en binaire en choisissant un seuil unique d'intensité avec, pour critère, de minimiser la discontinuité de chaque image avec la suivante. Immédiatement, dans chaque image nous identifions le centre de masse de la goutte, enregistrons ses coordonnées et suivons sa trajectoire jusqu'à ce qu'elle s'arrête et commence l'ascension, étant fragmentée en petites gouttes. À partir de ce point, nous sélectionnons seulement un fragment et suivons son mouvement en enregistrant les coordonnées de son centre de masse.

2.4 Données

Nous observons, dans la figure 2.6, le comportement typique d'une goutte d'eau distillée avec 15% de glycérine, de volume $V = 2\mu\text{l}$ qui tombe dans un solvant d'eau distillée avec glycérine à 25% ($\Delta\rho = 0.053\text{ g/cm}^3$). Le taux d'acquisition des images de la caméra est de 25 images/sec. Nous pouvons voir la rapide injection de la goutte dans le solvant, la formation de l'anneau, ses ondulations et ensuite la fragmentation en quatre petites gouttes qui remontent à la surface libre du solvant. Nous observons aussi, que quand l'anneau s'étale, il reste attaché à une membrane convexe.

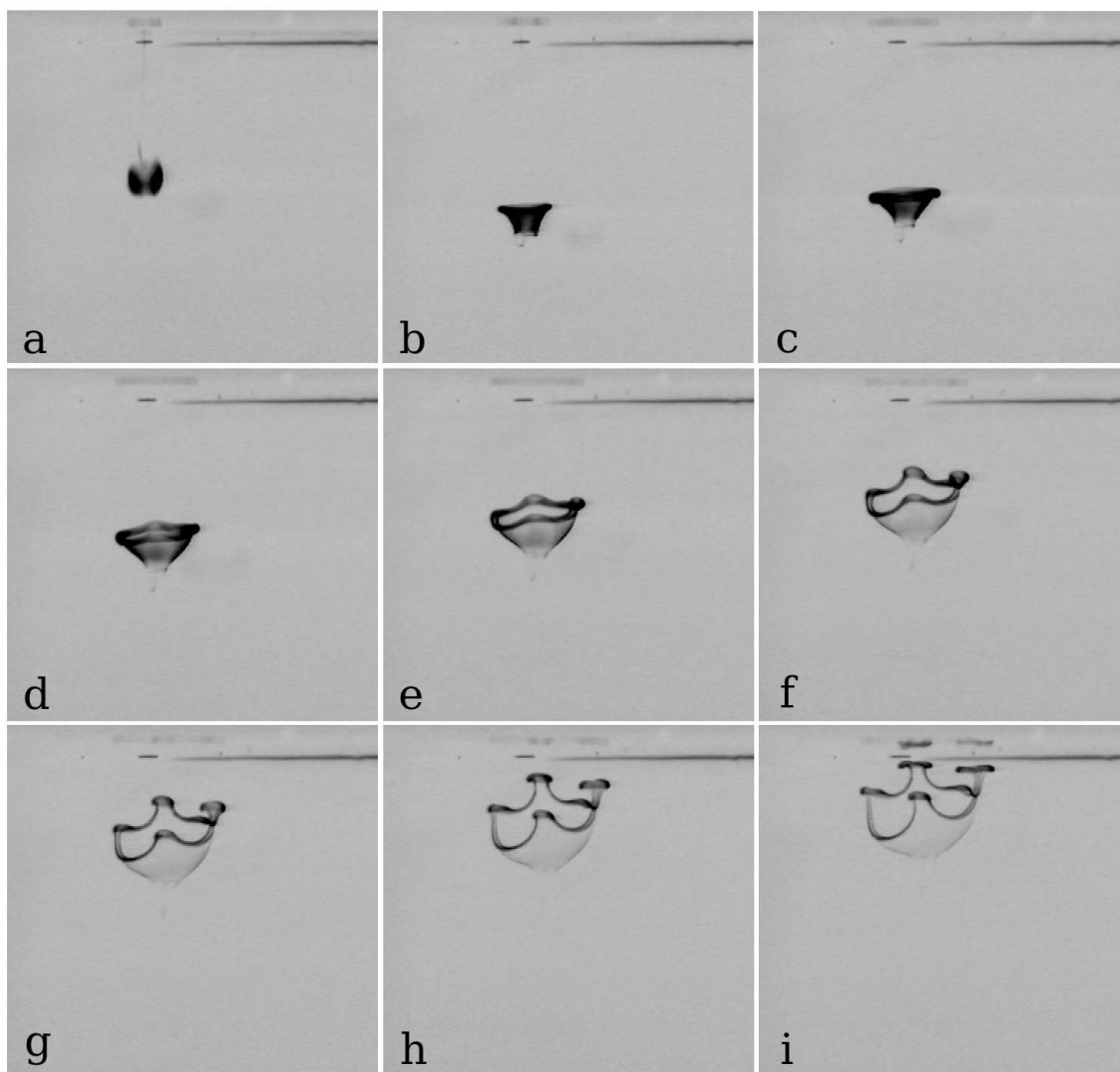


FIG. 2.6: Séquence des images montrant l'injection de la goutte, la formation de l'anneau et la fragmentation ; a) $t = 0.08\text{ s}$, b) $t = 0.20\text{ s}$, c) $t = 0.32\text{ s}$, d) $t = 0.44\text{ s}$, e) $t = 0.56\text{ s}$, f) $t = 0.68\text{ s}$, g) $t = 0.80\text{ s}$, h) $t = 0.92\text{ s}$, i) $t = 1.04\text{ s}$.

Dans le cas $\Delta\rho$ positif, il a été observé un phénomène similaire, appelé instabilité du turban[5]. Il faut noter que cette instabilité du turban a été observée aussi dans le cas des fluides non miscibles [12].

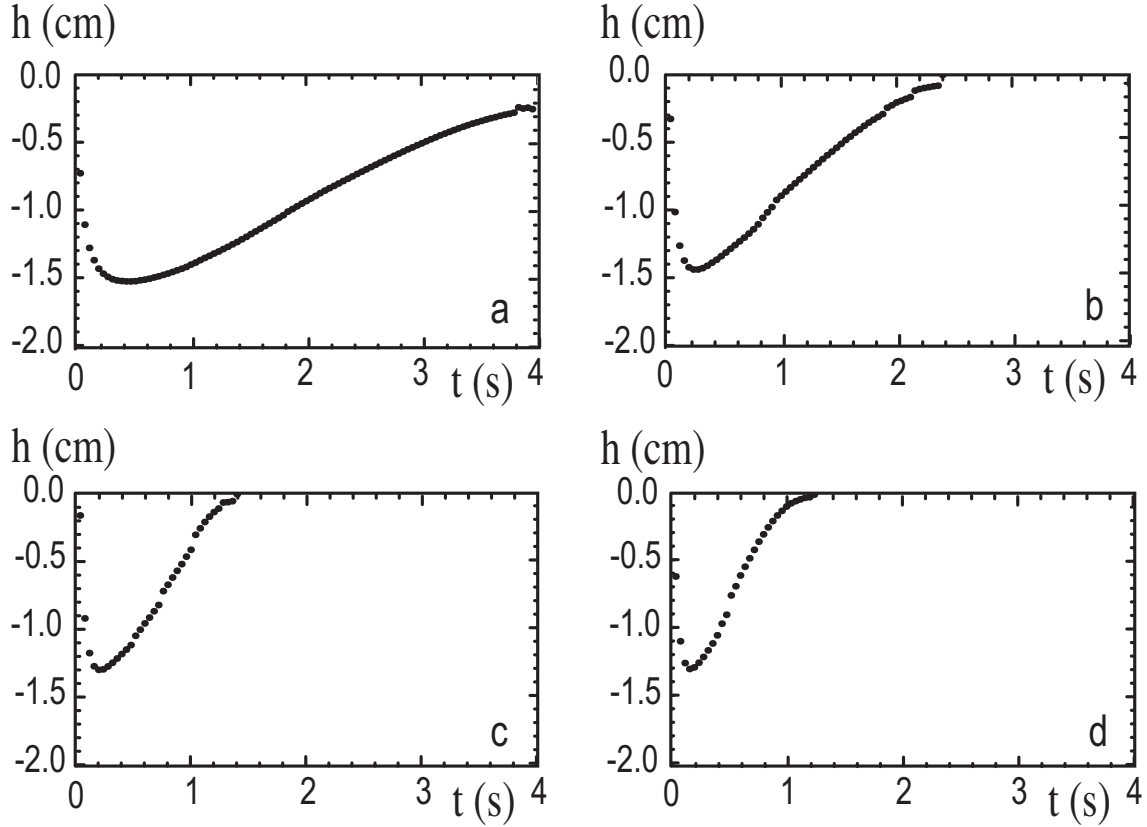


FIG. 2.7: La hauteur de la goutte h en fonction du temps pour $V = 4\mu l$; $\Delta\rho$ = a) 0.01325, b) 0.0265, c) 0.03975 et d) 0.04505 g/cm^3 .

Dans la figure 2.7, nous observons l'évolution de la coordonnée longitudinale h , du centre de masse de la goutte, en fonction du temps pour un volume fixé, $V = 4\mu l$, et pour différentes valeurs de $\Delta\rho$. Nous pouvons voir que, au fur et à mesure que la différence de densité diminue, le temps de montée (le temps que prend un fragment pour arriver à la surface) augmente et quand la différence de densité est nulle, le temps de montée devient infini. Nous pouvons voir aussi que la hauteur minimale (la hauteur à laquelle l'anneau de vorticité s'arrête) augmente légèrement quand la différence de densité augmente. Dans ces graphiques, on remarque aussi l'injection rapide de la goutte dans le solvant.

La figure 2.8 nous montre aussi l'évolution de la coordonnée longitudinale h , de la goutte, en fonction du temps, mais pour une différence de densité fixée, $\Delta\rho = 0.04505 g/cm^3$, et pour différentes valeurs du volume V . Nous pouvons observer que, quand le volume de la goutte augmente, la hauteur minimale diminue, c'est-à-dire, la goutte va plus bas dans

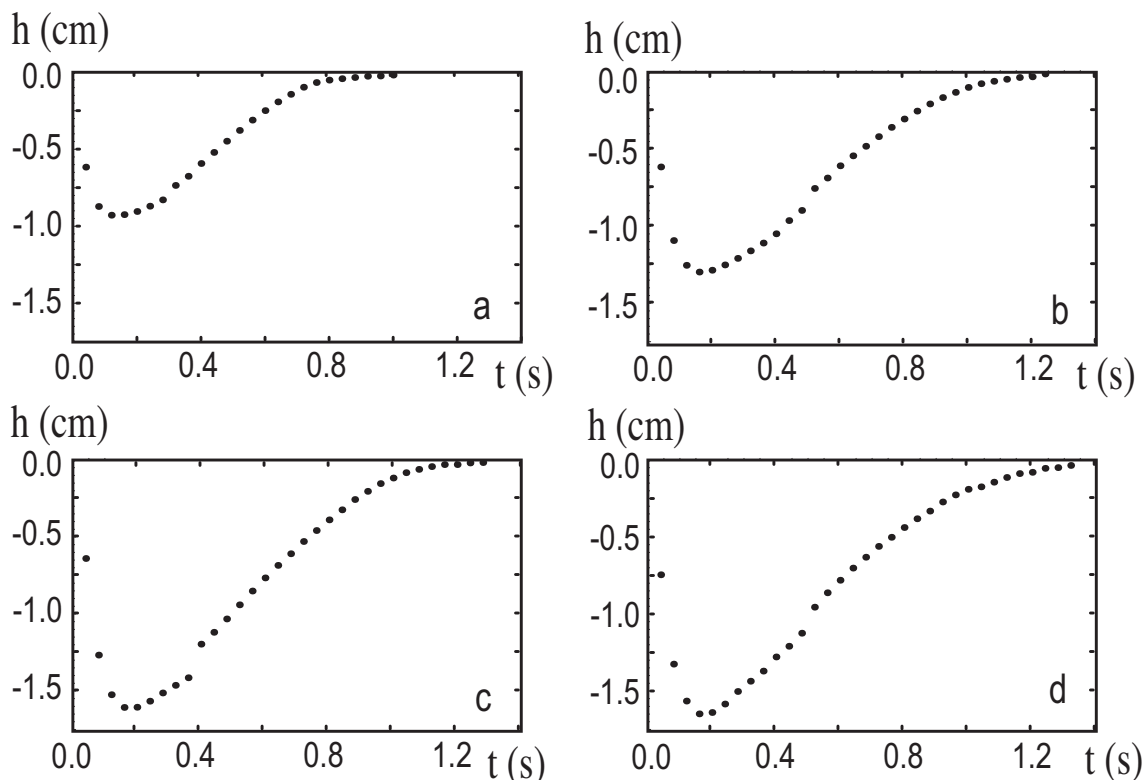


FIG. 2.8: La hauteur de la goutte h en fonction du temps pour $\Delta\rho = 0.04505g/cm^3$; $V =$ a) 2, b) 4, c) 6 et d) $8 \mu l$.

le solvant. Nous voyons maintenant que c'est le temps de montée qui augmente légèrement avec le volume de la goutte.

À partir des graphiques 2.7 et 2.8, nous avons calculé la vitesse de la goutte avec la méthode à trois points, c'est-à-dire :

$$v_i = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}.$$

Nous avons choisi cette méthode parce qu'elle donne les courbes les plus continues et nous pouvons voir les résultats dans les figures 2.9 et 2.10. Sur ces graphiques, nous voyons que, à volume constant, la vitesse maximale augmente avec la différence de densité $\Delta\rho$, alors que le temps de remontée à la surface diminue (figure 2.9). À différence de densité $\Delta\rho$ constante, nous constatons que le temps pour arriver à la surface augmente avec le volume de la goutte et la vitesse maximale ne change pas beaucoup (figure 2.10).

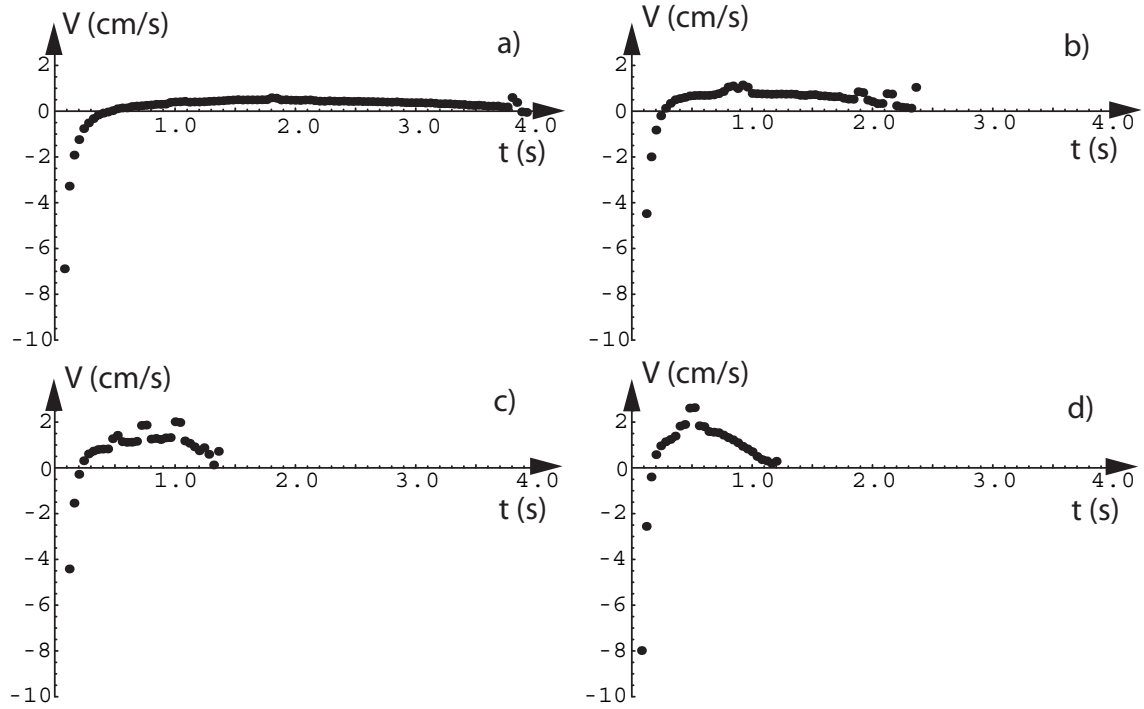


FIG. 2.9: La vitesse de la goutte en fonction du temps pour $V = 4\mu\text{l}$; $\Delta\rho =$ a) 0.01325, b) 0.0265, c) 0.03975 et d) 0.04505 g/cm^3 .

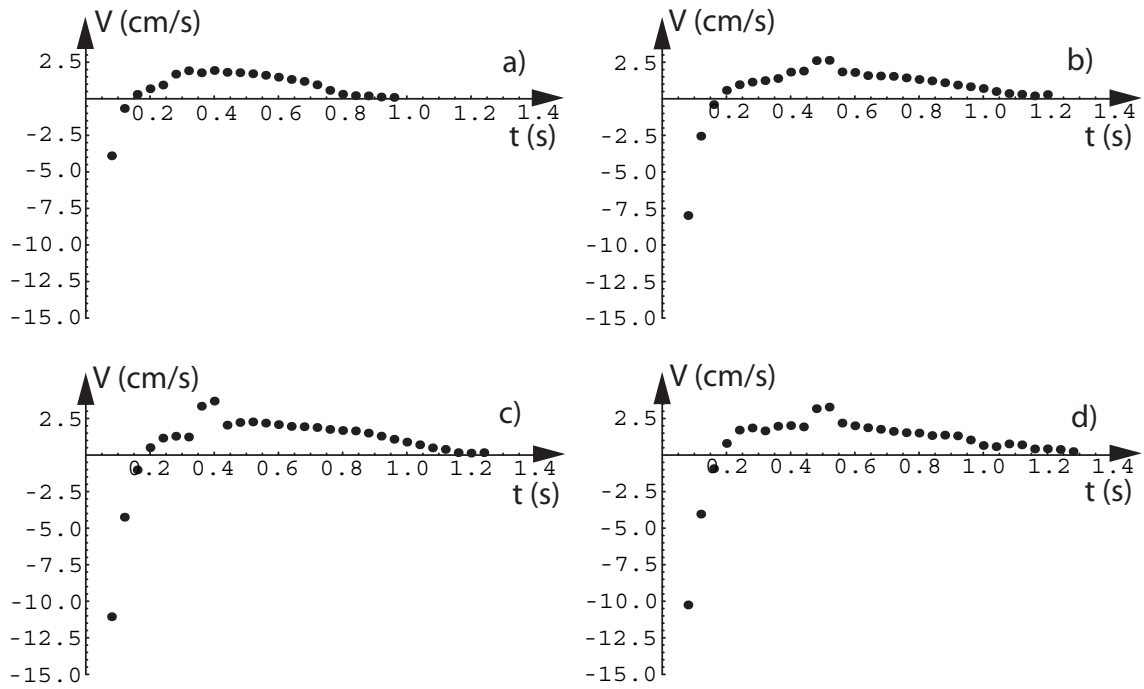


FIG. 2.10: La vitesse de la goutte en fonction du temps pour $\Delta\rho = 0.04505\text{g}/\text{cm}^3$; $V =$ a) 2, b) 4, c) 6 et d) 8 μl .

À partir de tous ces graphiques, il est difficile de conclure directement sur le temps de descente (le temps que prend l'anneau pour arriver à la hauteur minimale), mais nous reviendrons par la suite sur ce comportement.

Les discontinuités observées dans les graphiques sont dues au détachement des petites gouttes après la fragmentation de l'anneau. Dans les futures expériences, nous pensons mettre des petits traceurs pour enlever ces discontinuités et pour déterminer le mouvement à l'intérieur de la goutte.

2.5 Modèle Théorique Simple

Pour décrire la dynamique de la goutte nous avons développé un modèle simple qui prend en compte la dissipation due à la viscosité (loi de Stokes), et la poussée d'Archimède. Pour une sphère homogène de masse m , densité ρ et rayon r , dans un fluide de densité ρ_f , et viscosité μ , nous avons

$$m a = \bar{m} g - 6\pi r \mu v$$

$$\bar{m} = V \Delta\rho$$

où $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $\Delta\rho = \rho_f - \rho$ et $m = V \rho$. L'équation dynamique est donc

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{\Delta\rho}{\rho} - \frac{9}{2} \frac{\mu}{r^2 \rho} v.$$

Pour la goutte, nous prenons le même modèle,

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{\Delta\rho}{\rho} - \gamma \frac{\nu}{r^2} v, \tag{2.9}$$

$\nu \equiv \mu/\rho$ est la viscosité dynamique, $r \equiv \kappa \sqrt[3]{V}$ est la taille caractéristique de la goutte, et κ , γ sont des facteurs géométriques ($\gamma = 9/2$ et $\kappa = 0,62$ pour une sphère). La condition initiale, $v(t=0) = v_0$, est donnée par la transformation d'énergie de tension de surface en énergie cinétique de translation et rotation

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = 4\pi \sigma r^2,$$

avec $I = \alpha m r^2$ moment d'inertie de la goutte et $\omega = \beta v_0 / r$ la fréquence de rotation. Si toute l'énergie est transformée en rotation, c'est-à-dire, il n'y a pas de glissement, alors $\beta = 1$, si non $\beta > 1$. Nous avons donc la vitesse initiale de la goutte

$$v_0 = -\sqrt{\frac{6\sigma}{(1 + \alpha\beta^2)\rho r}}.$$

Nous définissons le temps visqueux $\tau_\nu \equiv r^2/\gamma\nu$ et nous obtenons la vitesse limite v_∞ en faisant $dv/dt = 0$ dans l'équation (2.9)

$$v_\infty = \frac{\Delta\rho}{\rho}g\tau_\nu.$$

L'équation (2.9) devient

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_\infty - v}{\tau_\nu}.$$

Nous intégrons cette équation de $v = v_0$ à $v = 0$, et nous obtenons le temps de descente τ_d , qui est le temps que prend la goutte pour s'arrêter,

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_d} \frac{dt}{\tau_\nu} &= \int_{v_0}^0 \frac{dv}{v_\infty - v} \\ \tau_d &= \tau_\nu \ln\left(1 - \frac{v_0}{v_\infty}\right), \end{aligned} \tag{2.10}$$

et la hauteur minimale h_{min} , atteinte par la goutte avant de remonter,

$$\begin{aligned} \int_0^{h_{min}} \frac{dx}{\tau_\nu} &= \int_{v_0}^0 \frac{v}{v_\infty - v} dv \\ h_{min} &= v_\infty \tau_d + v_0 \tau_\nu. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Quand $\Delta\rho \rightarrow 0$, nous avons

$$h_{min} = v_0 \tau_\nu \propto V^{1/2},$$

ce qui est en accord avec des résultats déjà obtenus [77]. Si $t \gg \tau_\nu$, nous pouvons estimer le temps de montée simplement en divisant la hauteur minimale par la vitesse limite

$$\tau_m = -\frac{h_{min}}{v_\infty} = \left| \frac{v_0}{v_\infty} \right| \tau_\nu - \tau_d, \tag{2.12}$$

donc le temps total est $\tau_T = |v_0/v_\infty| \tau_\nu$. Cependant, le volume quand la goutte remonte n'est pas le même à cause de la fragmentation, donc la vitesse limite doit être calculée avec le volume V/n , où n est le nombre de fragments. Prenant en compte cette correction, nous obtenons

$$\tau_m = (\tau_T - \tau_d) n^{2/3}. \tag{2.13}$$

Le nombre de fragments peut être estimé en utilisant le nombre de Smith S [90] et le nombre de fragmentation F [5], ce qui a été déjà fait dans la référence [7].

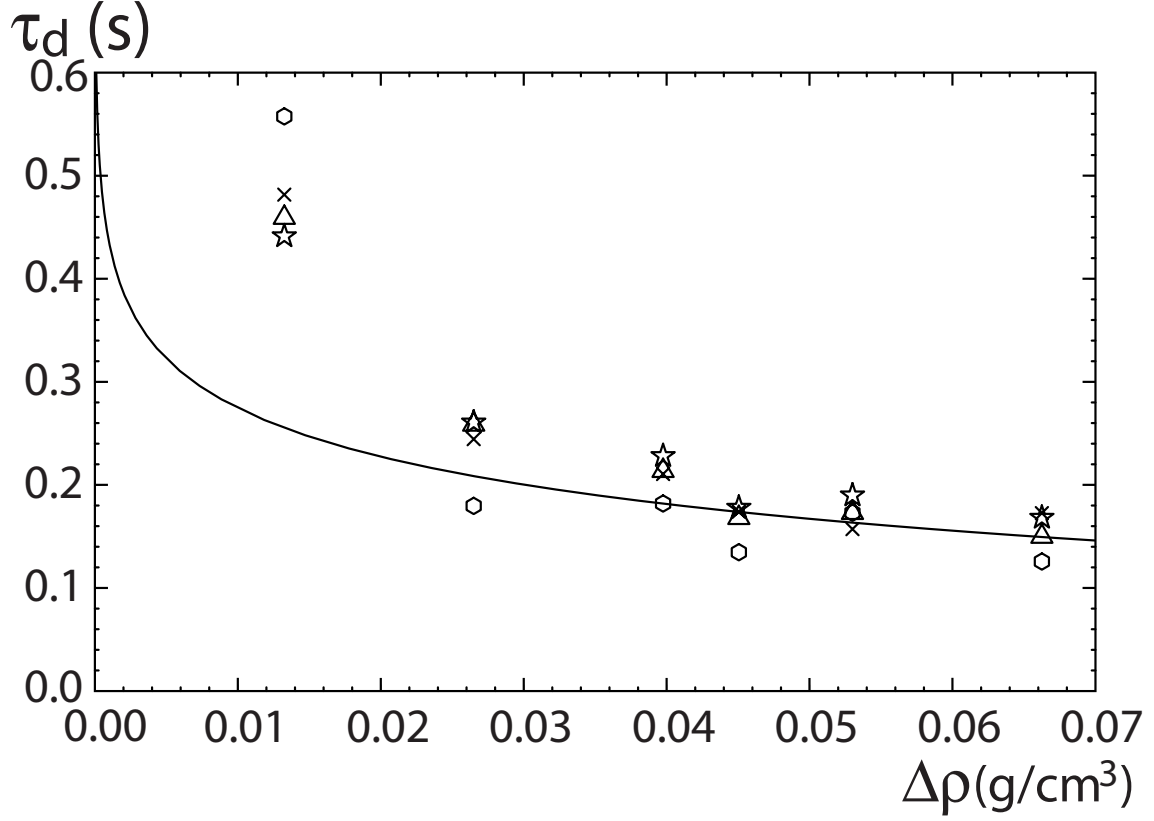


FIG. 2.11: Temps de descente τ_d en fonction de $\Delta\rho$; $V = 2\,\mu l$ (cercles), $V = 4\,\mu l$ (triangles), $V = 6\,\mu l$ (étoiles), $V = 8\,\mu l$ (croix). La ligne est la courbe théorique pour $V = 5\,\mu l$.

2.6 Comparaison entre le Modèle et les Résultats des Expériences

Dorénavant, nous fixons les valeurs des paramètres du modèle théorique : $\alpha\beta^2 = 4$, $\gamma = 6.67$ et $\kappa = 0.56$. Avec ces valeurs dans le modèle, nous comparons nos prédictions théoriques avec les résultats expérimentaux.

Pour les temps de descente, de montée et pour la hauteur minimale, nous avons :

$$\begin{aligned}\tau_d &= 0.024 V^{2/3} \ln\left(1 + \frac{1.879 V^{-5/6}}{\Delta\rho}\right), \\ \tau_m &= \left(0.045 \frac{V^{-1/6}}{\Delta\rho} - 0.024 V^{2/3} \ln\left(1 + \frac{1.879 V^{-5/6}}{\Delta\rho}\right)\right) n^{2/3}, \\ h_{min} &= 0.446 \Delta\rho V^{4/3} \ln\left(1 + \frac{1.879 V^{-5/6}}{\Delta\rho}\right) - 0.839 V^{1/2}.\end{aligned}$$

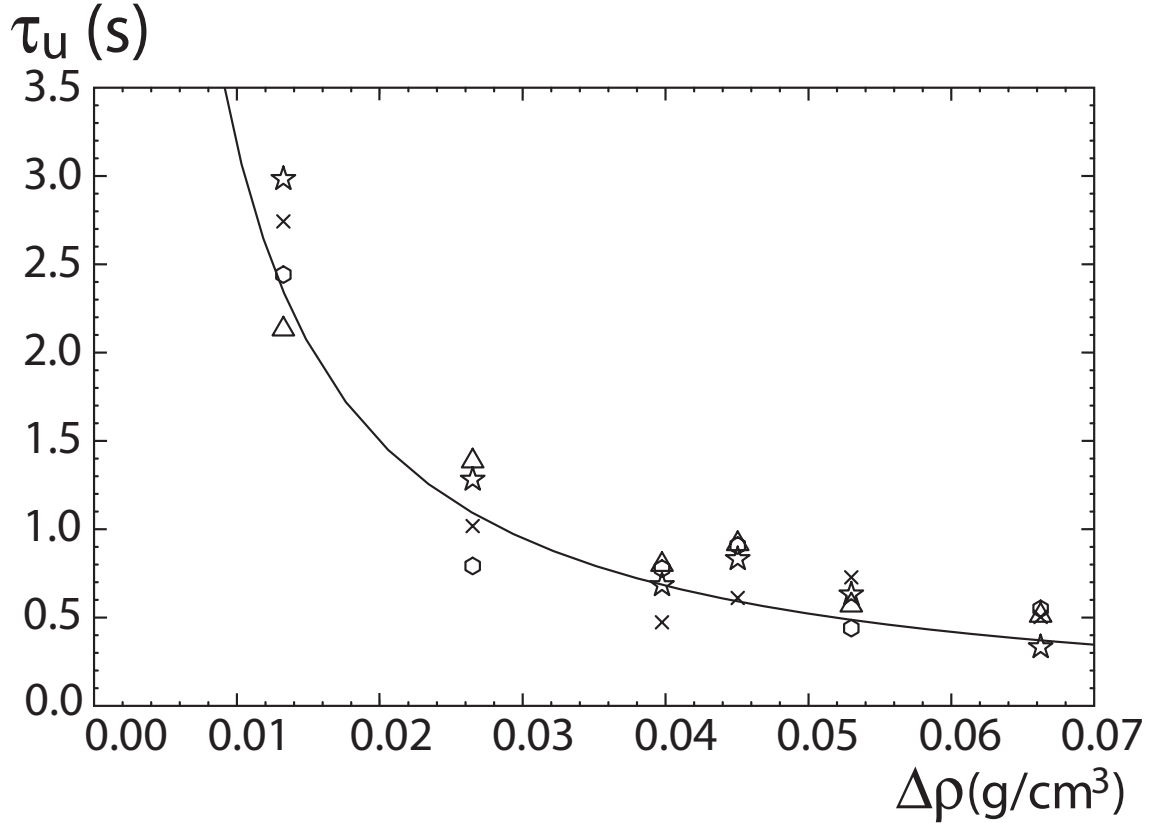


FIG. 2.12: Temps de montée τ_m en fonction de $\Delta\rho$; $V = 2 \mu l$ (cercles), $V = 4 \mu l$ (triangles), $V = 6 \mu l$ (étoiles), $V = 8 \mu l$ (croix). La ligne est la courbe théorique pour $V = 5 \mu l$.

Le graphique de la prédiction théorique pour le temps de descente τ_d , équation (2.10), est représenté figure (2.11). Cette courbe est en bon accord avec les données expérimentales pour $\Delta\rho > 0.02 \text{ g/cm}^3$, mais elle présente de grandes déviations pour des valeurs plus petites de $\Delta\rho$. En fait, quand $\Delta\rho \rightarrow 0$ la divergence logarithmique ne prend pas en compte la dissipation due à l'augmentation du rayon de l'anneau de vorticité. Pour inclure cet effet il faudrait développer un modèle plus sophistiqué qui décrirait la dynamique de la formation de l'anneau et son évolution. Nous voyons aussi que la dispersion des points est plus grande quand la différence de densité $\Delta\rho$, est plus petite.

Pour le temps de montée, nous normalisons les données expérimentales en divisant chaque valeur par $n^{2/3}$, où n est le nombre de petites gouttes après la fragmentation (voir équation (2.13)). Avec l'équation (2.12), nous avons un très bon accord avec les données expérimentales, et nous pouvons le voir dans la figure (2.12), où nous avons fait le graphique de la courbe théorique pour $V = 5 \mu l$, tous les autres volumes donnant des résultats similaires.

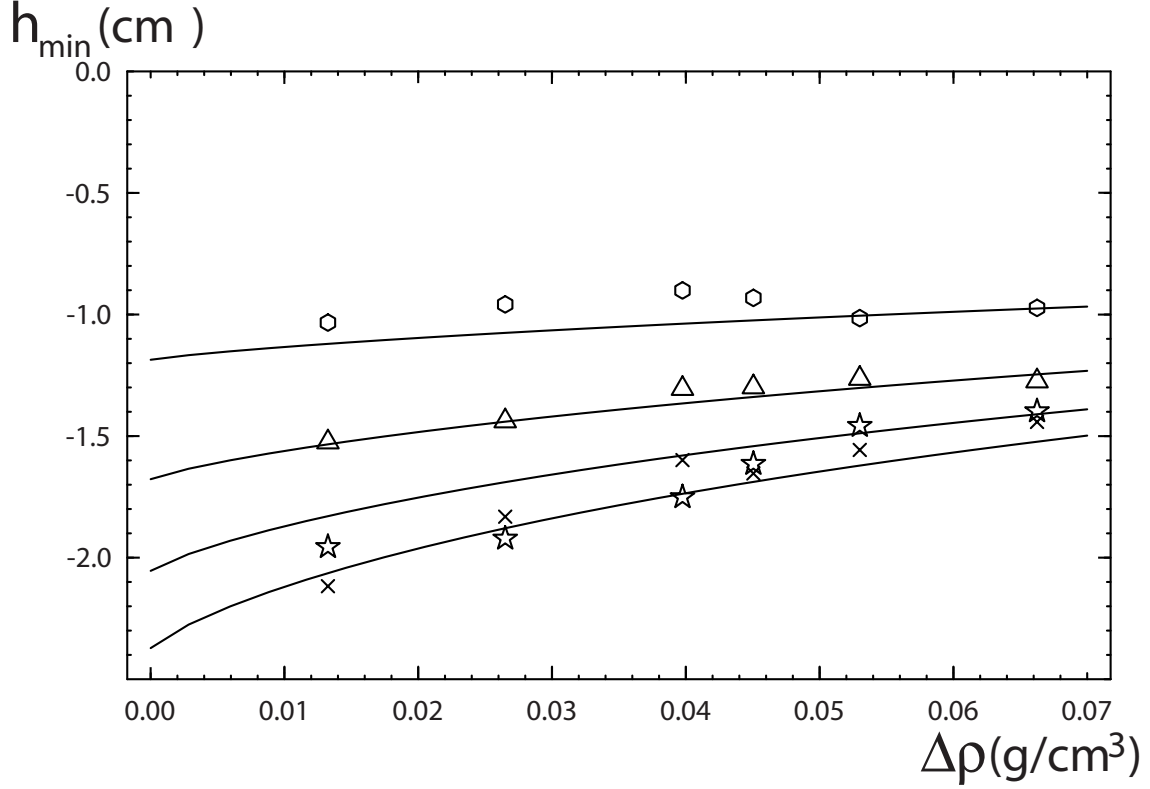


FIG. 2.13: La hauteur minimale h_{min} en fonction de $\Delta\rho$; $V = 2 \mu l$ (cercles), $V = 4 \mu l$ (triangles), $V = 6 \mu l$ (étoiles), $V = 8 \mu l$ (croix).

La hauteur minimale h_{min} , atteinte par la goutte avant de commencer à remonter, est présentée dans la figure (2.13) en fonction de $\Delta\rho$, avec les courbes théoriques, équation (2.11), pour $V = 2, 4, 6, 8 \mu l$. Nous pouvons voir que les courbes théoriques sont en bon accord avec les données expérimentales spécialement pour V petit. Pour les volumes plus grands il y a des effets de forme qui ne sont pas pris en compte dans le modèle théorique. Il faut noter que, à la limite de l'erreur expérimentale, pour $\Delta\rho = 0$ nous obtenons la loi d'échelle $h_{min} \propto V^{1/2}$ qui est en accord avec des résultats déjà publiés [77]. Le rapprochement entre les courbes, pour les grandes différences de densité, est dû au fait que la force d'Archimède devient plus importante que l'injection d'énergie cinétique initiale et à la limite quand $\Delta\rho \rightarrow \infty$, $h_{min} \propto \Delta\rho^{-1}V^{-1/3} \rightarrow 0$.

Nous exprimons h et t en fonction de h_{min} et τ_T , et nous présentons ces variables sans dimension dans la figure (2.14). Nous pouvons voir que toutes les gouttes suivent approximativement la même loi d'évolution. Dans la première étape, après l'injection de la goutte, l'évolution est très semblable à celle observée dans le cas de différences de densité nulle $\Delta\rho = 0$: la goutte tombe rapidement à l'intérieur du solvant et développe un anneau. Ensuite, l'anneau s'arrête à cause de la dissipation de l'impulsion initiale. À ce moment, la goutte atteint la hauteur minimale h_{min} , où la vitesse change de direction

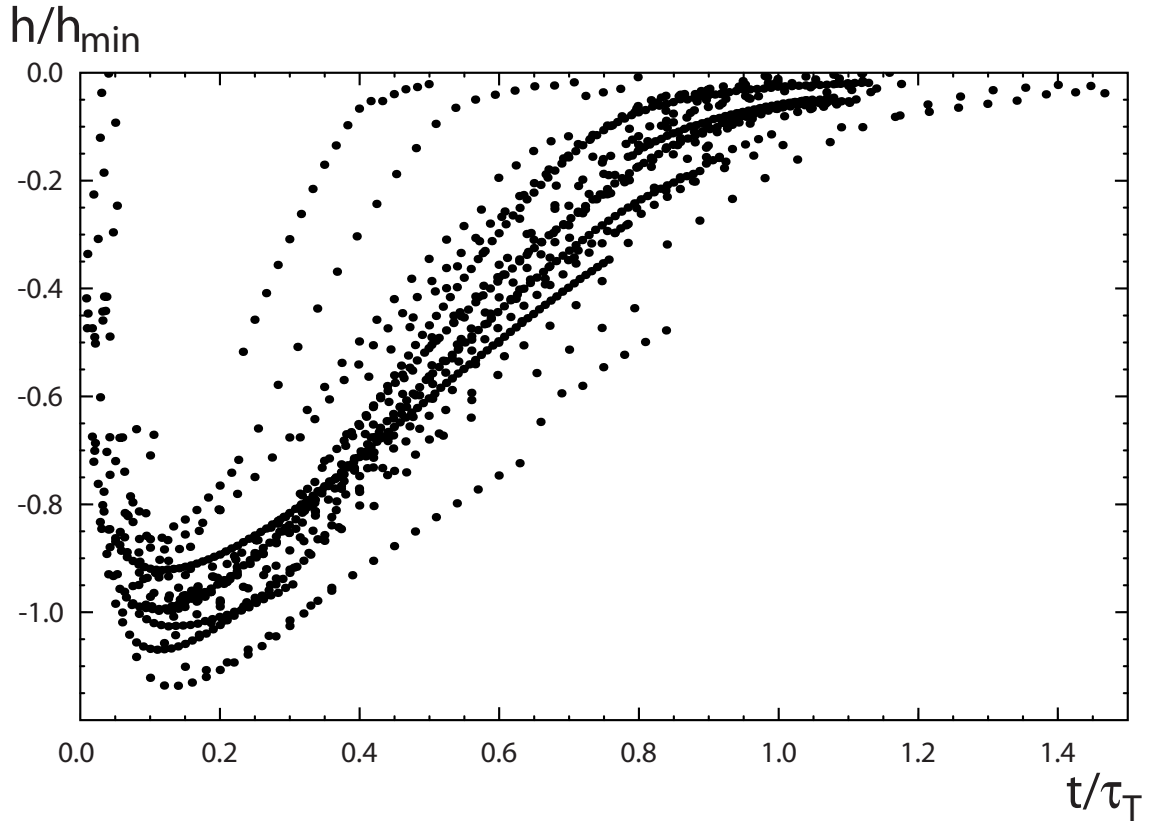


FIG. 2.14: Comportement hauteur vs temps exprimés en variables sans dimension, pour toutes les expériences à 25% de glycérine dans le solvant.

et une nouvelle instabilité apparaît en donnant lieu à la fragmentation de l'anneau en petites gouttes. Pour $\Delta\rho < 0$, les gouttelettes remontent vers la surface grâce à la poussée d'Archimède. Ce régime dynamique correspond à la partie linéaire du graphique juste après le minimum. La dissipation visqueuse ralentit le mouvement des fragments, mais dans ce régime dynamique la poussée d'Archimède est dominante.

Au moment final, quand les petites gouttes s'approchent de la surface, nous observons une déviation de la dépendance linéaire entre la hauteur et le temps. En fait, les gouttelettes subissent la poussée d'Archimède et elles réagissent comme des anneaux de vorticité, chacune subissant une collision contre un mur avec une vitesse longitudinale[50].

2.7 Interaction entre l'Anneau de Vorticité et la Surface

Pour décrire l'interaction entre l'anneau de vorticité qui s'approche perpendiculairement à la surface, nous pouvons remplacer la surface par un anneau image, symétrique par rapport à la surface du solvant et de circulation opposée, comme représenté figure (2.15). La présence de l'image assure que la composante de vitesse normale à la surface est nulle sur celle-ci. Alors l'anneau ne rebondit pas sur la surface et comme la composante tangentielle n'a pas besoin d'être nulle en l'absence de viscosité, il s'ouvre indéfiniment à cause de l'interaction avec l'anneau de vorticité image qui induit sur l'anneau une composante de vitesse radiale dirigée vers l'extérieur. Plus les deux anneaux s'approchent plus est forte l'interaction. Dans le cas visqueux, l'anneau s'ouvre, mais éventuellement ce processus s'arrête à cause de la dissipation visqueuse et après la diffusion [50]. Le cas de l'interaction entre un anneau et une paroi rigide est beaucoup plus complexe et il a été étudié numériquement et expérimentalement [39, 58, 65, 92].

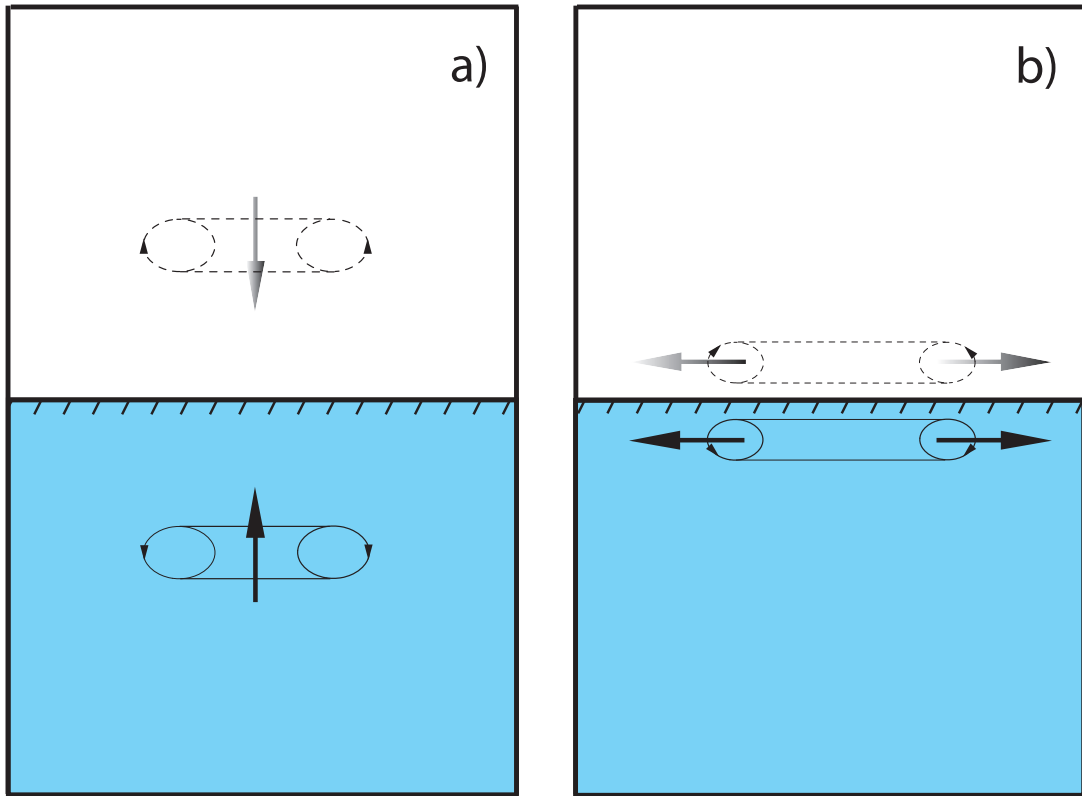


FIG. 2.15: Le rapprochement de l'anneau à la surface du solvant peut être décrit en ajoutant un anneau image symétrique par rapport au plan de la surface. La figure b) montre que l'anneau ne rebondit pas, mais s'ouvre dû à son interaction avec son image.

2.8 Conclusion

Nous avons montré un nouveau type d'instabilité des gouttes, où des gouttelettes secondaires remontent à la surface parce que la différence de densité entre la goutte et le solvant est négative. Nous avons développé un modèle théorique qui prend en compte la conversion d'énergie de tension de surface en énergie cinétique et nous montrons que la poussée d'Archimède et la dissipation visqueuse dominent la dynamique. Même si le modèle est simple, il capture l'essentiel du phénomène et donne les lois d'échelle correctes pour le temps de l'ascension, et pour la hauteur minimale. Pour le temps de descente, le modèle prédit bien la loi d'échelle, cela pour des valeurs de densité plus grandes que 0.02 g/cm^3 . Pour des valeurs inférieures la déviation entre le modèle et les résultats expérimentaux est grande, ce qui signifie que pour de basses densités il y a des effets qui ne sont pas inclus, et par conséquent il est nécessaire de refaire un modèle plus complet. Enfin, quand les fragments s'approchent de la surface, on observe une déviation de la dépendance linéaire de la hauteur en fonction du temps. Les gouttes sentent la présence de la surface comme si c'était un mur glissant, ce qui équivaut à remplacer le mur par l'image spéculaire des gouttes ayant une circulation opposée. Il en résulte que les gouttes réduisent leur vitesse et s'élargissent.

3 La Valve à Cristaux Liquides avec Rétro-Action Optique : Étude Linéaire

3.1 Introduction

La matière, qui remplit notre univers, présente une variété très riche de phases ; liquide, solide et gazeuse sont les plus connues. Mais beaucoup d'autres existent. Par exemple : le plasma [28], le condensé de Bose-Einstein [3, 17, 42], les cristaux plastiques [85] et les cristaux liquides [34]. Les phases cristalline et liquide exhibent des caractéristiques opposées, d'un côté les cristaux possèdent une structure complètement ordonnée, tant de translation que d'orientation ; en revanche, dans les liquides aucun ordre n'existe, toutes les molécules peuvent se déplacer et tourner librement. Il y a des substances avec les caractéristiques des deux phases, c'est-à-dire, avec un ordre d'orientation, et parfois aussi spatial, comme les cristaux ; et en même temps elles peuvent couler comme les liquides parce que leurs molécules ont une liberté de mouvement, et pour cette raison sont nommées *Cristaux Liquides* [25, 34, 38, 66]. Une représentation schématique de cette phase est donnée sur la figure (3.1).

C'est dans une expérience d'optique non linéaire avec des cristaux liquides que nous avons étudié l'apparition de *structures localisées*. Les structures localisées sont des objets macroscopiques semblables à des particules, elles peuvent être vues comme des petits domaines de taille finie dans un système étendu. Dans ce système nous pouvons identifier deux éléments : les structures localisées et la solution de base qui va dominer le système vers l'infini. Cette solution de base peut être homogène, périodique, quasi-périodique, chaotique, etc. Nous pouvons imaginer que les structures localisées sont des particules au sein de la solution de base. D'un point de vu dynamique, les structures localisées, dans un système spatialement unidimensionnel, sont des connexions homoclines pour le système dynamique stationnaire (voir l'espace de phase de la figure (1.5)).

Les structures localisées n'existent pas seulement dans des expériences avec des cristaux liquides. Des structures localisées ont été observées dans différents domaines comme par exemple : les matériaux magnétiques [44], les expériences de décharge dans un gaz [10], les taches dans les réactions chimiques [57], les ondes superficielles à la surface d'un fluide [41], *les oscillons* dans les milieux granulaires [91], les états isolés en convection thermique [51, 56], les ondes solitaires en optique non linéaire [62, 82] et les solitons de cavité dans les lasers [86].

3.2 Les Cristaux Liquides

Les cristaux liquides sont des molécules organiques (une molécule typique est représentée figure (3.2)) qui présentent à la fois les caractéristiques des cristaux et des liquides. Parfois elles sont appelées *mésophase* (phase intermédiaire) parce que, pour ces molécules-là, il y a un intervalle de valeurs du paramètre de contrôle (en général la température) pour lequel la phase « cristal liquide » existe. Cet intervalle est entre la phase cristalline et la phase liquide. Une représentation de cette phase (figure (3.1)), montre le cristal qui est complètement ordonné, le liquide qui est complètement désordonné et entre les deux, le cristal liquide qui garde l'ordre d'orientation du cristal mais qui peut se déplacer librement comme le liquide.

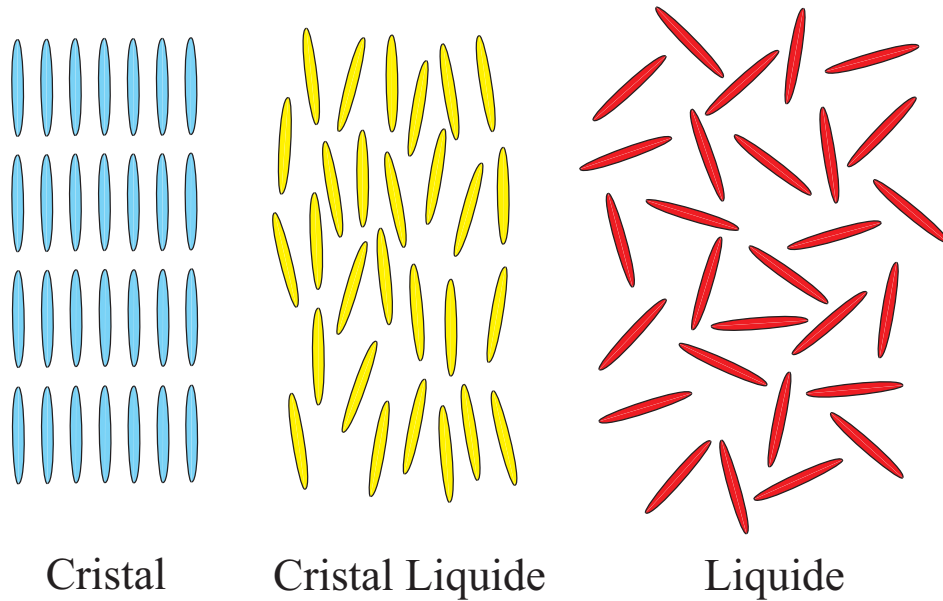


FIG. 3.1: Les phases solide, cristal liquide et liquide

En général, les molécules de cristal liquide ont une forme allongée comme un bâtonnet, de l'ordre de $30 \cdot 10^{-10}m$ de long et $5 \cdot 10^{-10}m$ de large (voir figure (3.2)) et elles interagissent entre elles à travers trois constantes élastiques (*flexion*, *torsion* et *en éventail*) (figure (3.3)), qui incitent les molécules du cristal liquide à s'orienter dans la direction moyenne des voisines. Cette direction moyenne est nommée le « directeur » \vec{n} .

L'énergie libre de Frank qui résume le comportement élastique d'un cristal liquide, s'écrit sous la forme

$$\mathcal{F}_e(\vec{n}(\vec{r})) = \int \frac{1}{2} (K_1(\nabla \cdot \vec{n})^2 + K_2(\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{n}))^2 + K_3(\vec{n} \times (\nabla \times \vec{n}))^2) d\vec{r},$$

où K_1 , K_2 , K_3 sont les constantes élastiques correspondant à l'éventail, la torsion et la flexion, respectivement. Ces trois types de déformation sont montrées dans la figure (3.3).

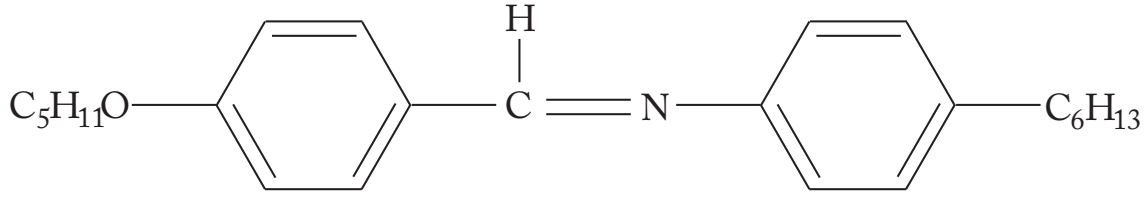


FIG. 3.2: Molécule de cristal liquide

Parmi les multiples propriétés des cristaux liquides, deux seulement nous intéressent : la biréfringence et la réponse à un champ électrique ou magnétique externe [25, 38]. Avec ces deux propriétés nous pouvons construire un circuit de rétro-action. Dans un milieu biréfringent la lumière voit deux indices de réfraction différents, selon que sa polarisation est parallèle ou perpendiculaire au directeur. Cela induit une différence de phase entre la composante de lumière polarisée parallèle au directeur (*onde extraordinaire*) et celle polarisée perpendiculaire au directeur (*onde ordinaire*). Par conséquent, la polarisation de la lumière ayant traversé un cristal liquide est, en général, changée de manière dépendante de son orientation initiale par rapport au directeur. Si l'orientation du directeur à son tour dépend de la polarisation de la lumière incidente, alors on peut avoir des effets de rétro-action qui donnent lieu à des dynamiques temporelles chaotiques [21, 89]. En général, l'inclinaison du directeur va changer la biréfringence, et la biréfringence va changer la polarisation de sortie des rayons lumineux. Cette lumière, nous la nommerons *lumière de lecture*, puisqu'elle « lit » l'inclinaison du directeur.

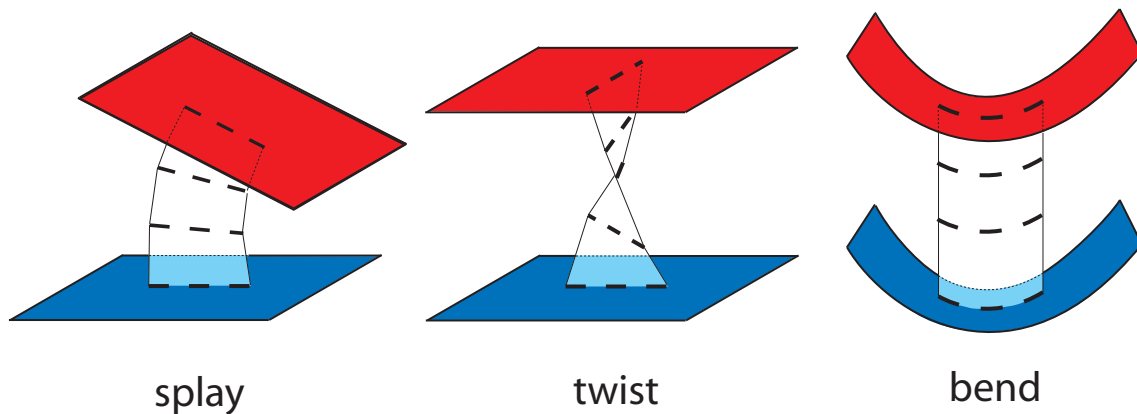


FIG. 3.3: Les trois types de déformation élastique dans les cristaux liquides : en éventail (splay, K_1), torsion (twist, K_2) et flexion (bend, K_3).

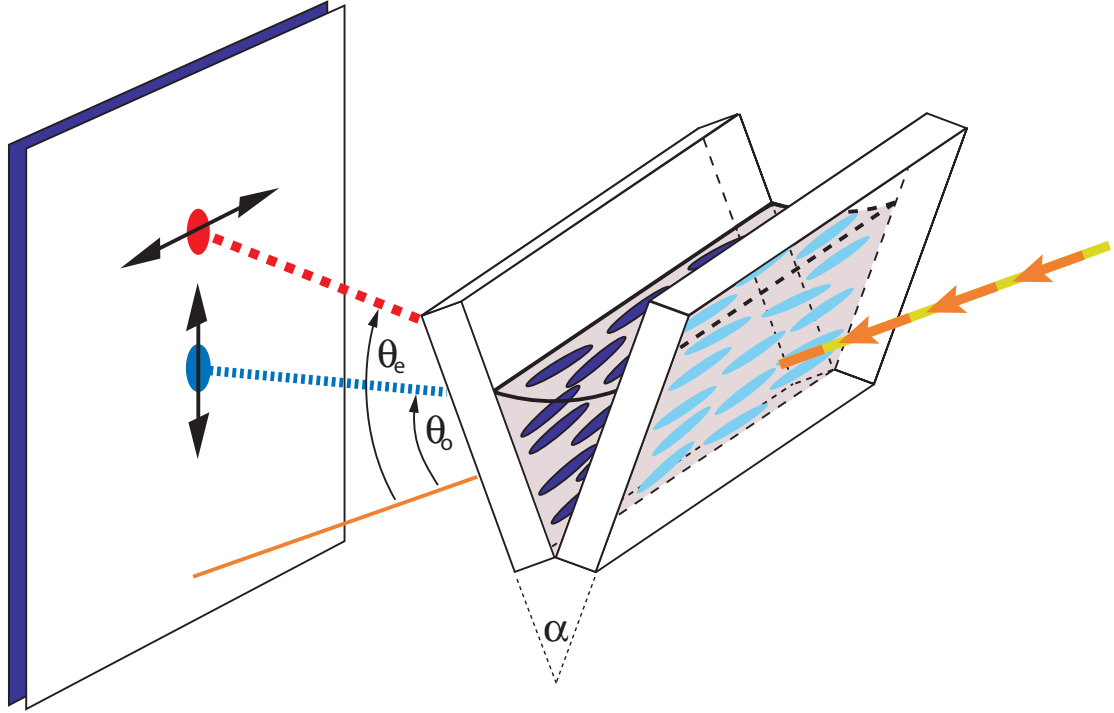


FIG. 3.4: Illustration expérimentale de la biréfringence ; deux faisceaux polarisés linéairement à 90° l'un de l'autre émergent du prisme avec angles de réfraction différents.

Pour mettre en évidence la biréfringence, nous pouvons faire l'expérience illustrée figure (3.4). Elle consiste à envoyer un faisceau laser dépolarisé sur un prisme de cristaux liquides. Le prisme est en fait une cuve, en forme de coin, remplie de cristaux liquides. Les deux parois en contact avec le cristal liquide sont traitées de façon à induire un ancrage planaire (directeur \vec{n} parallèle aux parois) et parallèle à l'arête du prisme. Comme les deux composantes de la polarisation voient des indices de réfraction différents, en vertu de la loi de Snell, la composante parallèle au directeur (lumière extraordinaire) va être diffractée avec un angle différent de celui de la composante orthogonale (lumière ordinaire). Alors, à la sortie du prisme nous allons trouver deux faisceaux polarisés linéairement : un parallèle à \vec{n} (lumière extraordinaire) avec un angle de déviation minimale θ_e et l'autre orthogonal à \vec{n} (lumière ordinaire) avec un angle de déviation minimale θ_o . À l'aide de la loi de Snell, nous pouvons calculer les indices de réfraction ordinaire n_o , et extraordinaire n_e [66]

$$n_o = \frac{\sin((\alpha + \theta_o)/2)}{\sin(\alpha/2)} \quad \text{et} \quad n_e = \frac{\sin((\alpha + \theta_e)/2)}{\sin(\alpha/2)}.$$

Dans la réponse à un champ électrique externe (voir figure (3.5)), les molécules de cristal liquide tendent à s'aligner dans la direction donnée par ce champ, ainsi un champ électrique externe va définir l'inclinaison du directeur et, par conséquent, contrôler la polarisation des rayons lumineux.

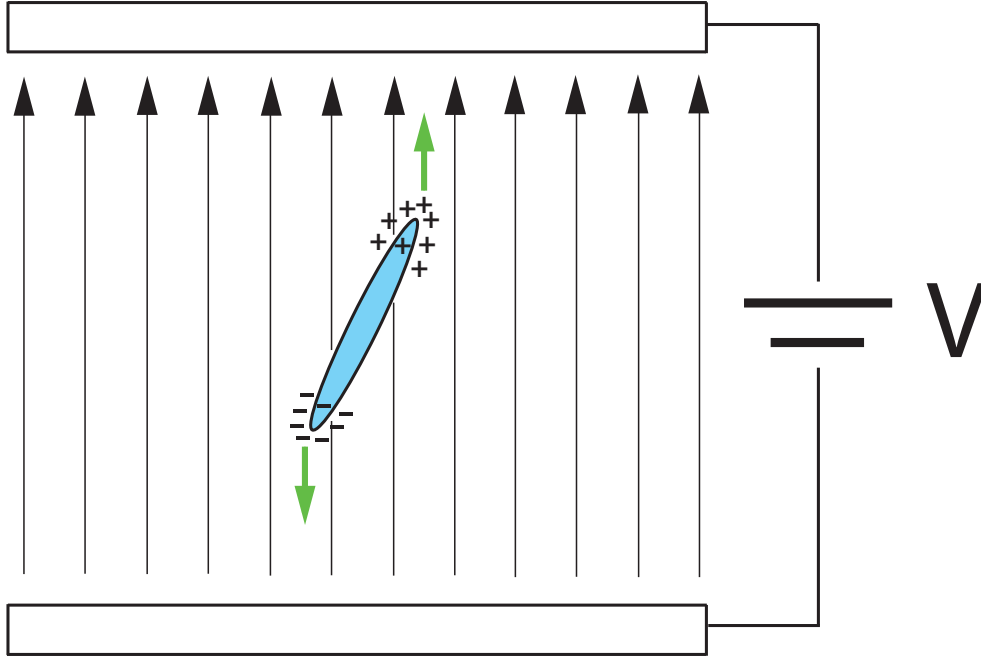


FIG. 3.5: Champ électrique externe

Si le cristal liquide est placé entre deux plaques de verre sur lesquelles la condition d'ancrage moléculaire est planaire et dans la même direction, toutes les molécules de cristal liquide vont s'orienter dans la même direction, parallèles aux parois. Si nous appliquons un champ électrique externe dans la direction orthogonale aux parois nous allons avoir compétition entre l'effet du champ qui veut aligner les molécules de cristal liquide dans sa direction et l'effet de couplage élastique qui veut que toutes les molécules de cristal liquide soient dans la direction parallèle aux parois. Si le champ électrique est faible, les molécules vont être orientées parallèles aux parois et seulement pour une valeur critique de l'intensité du champ électrique elles vont commencer à tourner. Cette transition, appelée *transition de Fréedericksz*, est super-critique (voir figure (3.8)) [47]. L'intensité de champ électrique critique est donnée par la formule

$$E_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K}{\epsilon_a}}$$

où d est la séparation entre les deux plaques de verre, $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ est l'anisotropie diélectrique et nous supposons que $K = K_1 = K_2 = K_3$.

Si la cellule de cristal liquide est mise dans un cycle de rétro-action optique, la transition de Fréedericksz peut devenir sous-critique (voir figure (1.7)) [32, 78].

Nous avons considéré l'action d'un champ électrique, mais des considérations et des résultats semblables peuvent être obtenus en substituant le champ électrique par un champ magnétique.

3.3 Le Montage Expérimental

C'est pour exploiter ces propriétés qui a été dessinée la *Valve Optique à Cristaux Liquides* (LCLV - Liquid Crystal Light Valve) [2, 75, 76], qui se compose d'une cellule de cristal liquide avec un miroir et un photo-conducteur mis entre deux conducteurs transparents (ITO - Indium-Tin-Oxide) auxquels on applique une tension électrique, créant ainsi un champ électrique dans la cellule. La tension est oscillante afin d'éviter l'accumulation des charges à l'intérieur du cristal liquide. Le photo-conducteur correspond à une résistance qui varie localement avec l'intensité de la lumière incidente, que nous nommerons lumière d'écriture, en modifiant ainsi, localement, la tension appliquée aux bords de la cellule à cristaux liquides et, par conséquent, l'inclinaison du directeur.

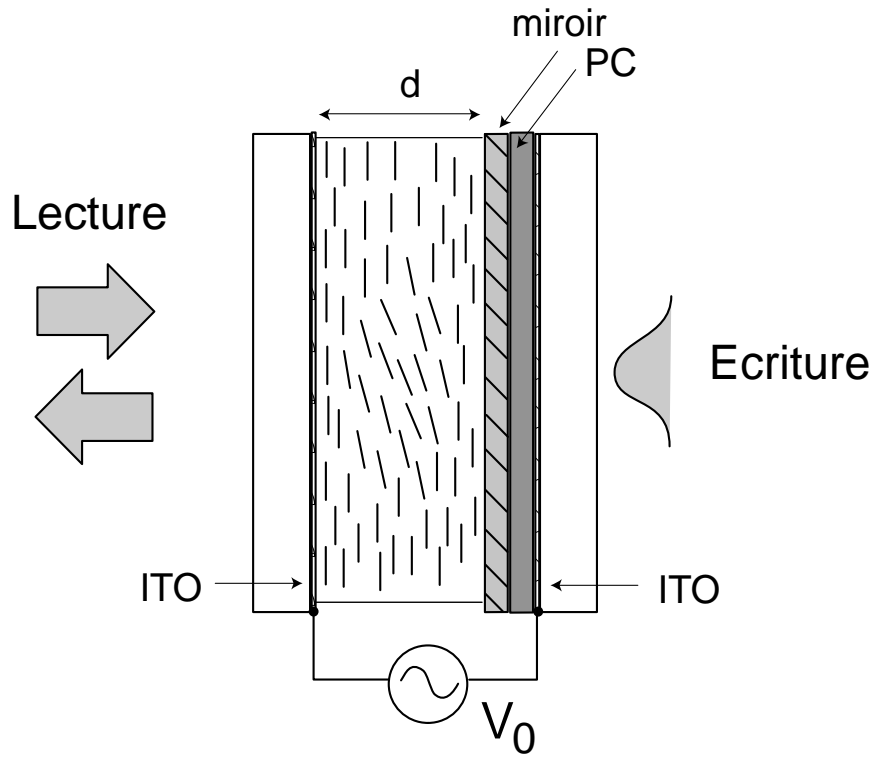


FIG. 3.6: Valve optique à cristaux liquides : photo-conducteur (PC) ; ITO (indium Tin Oxide), déposition conductrice et transparente, V_0 tension appliqué.

La LCLV est mise dans un circuit optique avec deux polariseurs ; dans le circuit il y a une longueur de propagation libre où a lieu la diffraction de la lumière. La rétro-action se fait en envoyant un faisceau laser sur la cellule de cristal liquide (*lumière de lecture*). Ce faisceau est réfléchi par le miroir et ensuite redirigé vers le photo-conducteur (*lumière d'écriture*). Plus en détail, la lumière du laser passe par le premier polariseur ; la lumière polarisée traverse la cellule de cristal liquide en se réfléchissant ensuite sur le

miroir pour traverser encore une fois la cellule et sortir avec un déphasage, qui dépend de l'inclinaison du directeur, en se transformant en lumière de lecture ; cette lumière passe par le deuxième polariseur qui transforme la modulation de phase en modulation d'intensité ; de là elle passe par une région où elle est diffractée, c'est cette diffraction qui va donner le couplage spatial dans la cellule ; ensuite, à travers un réseau de fibre optique, le faisceau lumineux, déjà transformé en lumière d'écriture, est réinséré vers le photo-conducteur, et va modifier l'inclinaison du directeur, ce qui ferme notre circuit de rétro-action.

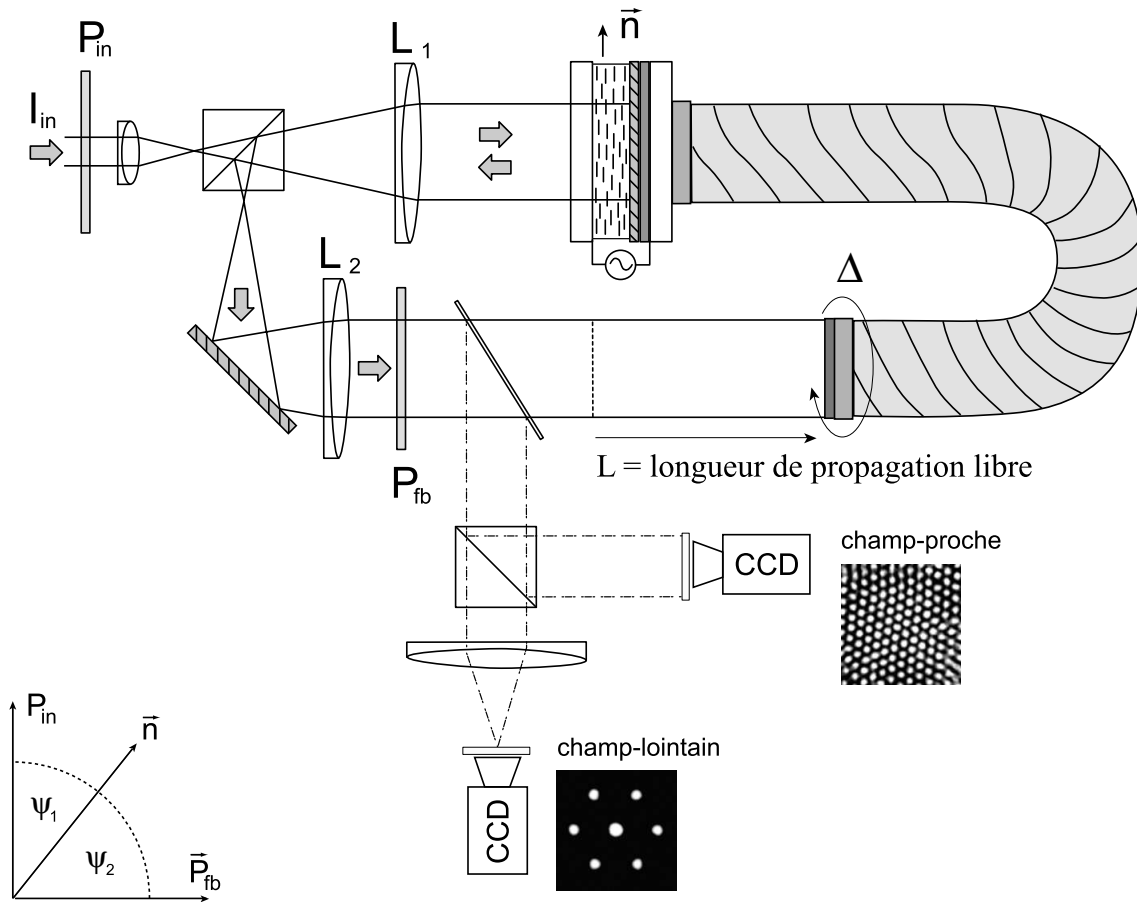


FIG. 3.7: Montage expérimental. La partie gauche en bas de la figure montre les angles que les axes des polariseurs forment par rapport au directeur \vec{n} , ψ_1 et ψ_2 .

C'est dans ce système que nous avons trouvé un nouveau type de structures localisées que nous appelons « *Pics Localisés* » (Localized Peaks) [13, 14, 15, 16]. Celles-ci apparaissent comme des maxima locaux de grande amplitude qui sont nucléés spontanément sur une structure spatiale périodique de plus basse amplitude. Ces structures existent comme conséquence de la coexistence entre deux états spatialement périodiques.

3.4 Le Modèle Théorique de la LCLV avec Rétro-Action Optique

Le modèle pour la LCLV, présenté par Clerc, Petrossian et Residori [31], est une version améliorée de celui proposé dans la référence [64]. Il a deux termes : le premier est un terme de restitution vers un angle $\bar{\theta}$ donné par le voltage V , et le deuxième est un terme de couplage diffusif,

$$\tau \partial_t \theta = -(\theta - \bar{\theta}) + \ell^2 \nabla_{\perp}^2 \theta \quad (3.1)$$

où $0 \leq \theta(r, t) \leq \pi/2$ représente l'angle moyen d'orientation des cristaux liquides, ℓ est la longueur de cohérence électrique et τ est le temps de relaxation local. $\bar{\theta}$ est donné par la formule empirique (figure 3.8) :

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{V_{FT}}{V}} \right) \quad \text{si } V \geq V_{FT}$$

$$\bar{\theta} = 0 \quad \text{si } V < V_{FT},$$

V_{FT} est le voltage de seuil pour la transition de Fréedericksz.

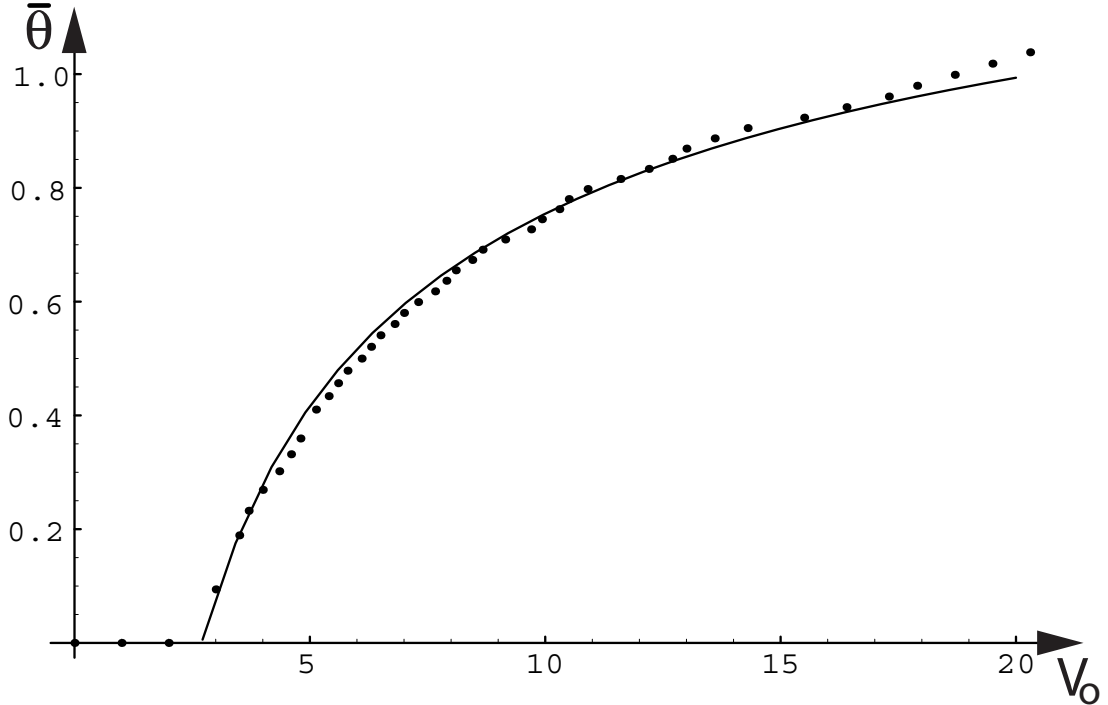


FIG. 3.8: Graphique de V_0 vs θ : points expérimentaux et ligne théorique

Dans la LCLV, le potentiel électrique efficace V , ressenti localement par les molécules de cristal liquide, est donné par la tension totale appliquée V_0 , et par la réponse du photo-conducteur à l'intensité de la lumière d'écriture I_w . S'il n'y a pas de lumière d'écriture sur le photo-conducteur, le potentiel électrique efficace est

$$V = \Gamma V_0,$$

où Γ est l'impédance des couches diélectriques de la LCLV. Pour de petites intensités de lumière, de l'ordre de quelques mW/cm^2 , on peut faire l'approximation de la réponse du photo-conducteur par une fonction linéaire et le potentiel électrique efficace peut être écrit comme

$$V = \Gamma V_0 + \alpha I_w(\theta, \nabla_\perp),$$

où α est un paramètre phénoménologique qui prend en compte, dans l'approximation linéaire, la réponse du photo-conducteur. Alors, (3.1) devient

$$\tau \partial_t \theta = \ell^2 \nabla_\perp^2 \theta - \theta + \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\Gamma V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha I_w(\theta, \nabla_\perp)}} \right). \quad (3.2)$$

Après le polariseur de rétro-action P_{fb} , dans la région de propagation libre (figure 3.7), la propagation de la lumière peut être décrite par l'équation des ondes dans l'approximation scalaire et paraxiale

$$\nabla_\perp^2 E - 2i\kappa \frac{\partial}{\partial z} E = 0.$$

Cette équation peut être résolue formellement

$$E(z) = e^{-i\frac{z}{2\kappa} \nabla_\perp^2} E(0).$$

L'intensité de la lumière d'écriture est alors

$$I_w = \left| e^{-i\frac{L}{2\kappa} \nabla_\perp^2} E(0) \right|^2,$$

où L est la longueur de propagation libre (voir figure 3.7) et $E(0)$ est le champ électrique de la lumière après avoir traversé le polariseur de rétro-action P_{fb} . Plus précisément, elle a traversé le polariseur d'entrée P_{in} qui fait un angle ψ_1 par rapport au directeur \vec{n} des cristaux liquides, le polariseur de rétro-action P_{fb} qui fait un angle ψ_2 par rapport à \vec{n} , et la cellule de cristaux liquides qui lui a donné un déphasage global $\varphi = 2\kappa d \Delta n \cos^2 \theta$ (d est l'épaisseur de la couche de cristal liquide et $\Delta n = n_e - n_o$ est la différence entre l'indice de réfraction extraordinaire et ordinaire). Si E_{in} est le champ électrique initial, alors

$$E(0) = (\sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 e^{-i\varphi}) E_{in}.$$

L'intensité de la lumière I_w qui arrive sur le photo-conducteur est donnée par :

$$I_w = I_{in} \left| e^{-i\frac{L}{2\kappa}\nabla_{\perp}^2} (\sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 e^{-i\varphi}) \right|^2, \quad (3.3)$$

et $I_{in} = |E_{in}|^2$. Nous définissons de nouvelles variables pour simplifier les notations

$$\begin{aligned} \varphi &= \beta \cos^2 \theta; & \beta &= 2\kappa d \Delta n; & \Delta n &= n_e - n_o \\ t &\rightarrow \tau t & x &\rightarrow \ell x & \Lambda &\equiv -\frac{L}{2\kappa \ell^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nous pouvons à présent effectuer l'analyse de stabilité linéaire.

3.5 L'Analyse de Stabilité Linéaire

Le système a des solutions stationnaires homogènes qui sont déterminées par V_0 et I_{in} . Nous allons étudier leur stabilité linéaire en ajoutant à la solution stationnaire homogène du modèle théorique, une petite perturbation qui dépend de l'espace et du temps. Nous allons montrer que des structures spatiales peuvent être engendrées par l'instabilité en fonction de la longueur de diffraction L , mais aussi de la tension externe appliquée V_0 et de l'intensité de la lumière I_{in} .

Soit θ_0 solution stationnaire homogène du modèle théorique (3.1)

$$\theta_0 = \bar{\theta}|_{\theta=\theta_0}. \quad (3.5)$$

Nous perturbons le système autour de cette solution,

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 \quad \text{avec} \quad \partial_t \theta_1 = \sigma \theta_1 \quad \text{et} \quad \nabla_{\perp}^2 \theta_1 = -k^2 \theta_1.$$

Si le système a des conditions de bord périodiques et si le bord est carré, alors $\theta_1 = e^{\sigma t + i\vec{k} \cdot \vec{x}}$. Si le bord est circulaire, $\theta_1 = e^{\sigma t} J_m(kr)$, où $r^2 = x^2 + y^2$, J_m est une fonction de Bessel et $m \in \mathbb{Z}$. La perturbation qu'on doit imposer va dépendre des conditions aux bords et de la géométrie du système. Cependant, le résultat va être le même, les interprétations seules vont être différentes.

En remplaçant θ par la solution perturbée dans I_w (équation (3.3)) et en gardant les termes jusqu'au premier ordre en ε , nous avons

$$\begin{aligned} I_w &= I_{in} \left| e^{i\Lambda \nabla_{\perp}^2} \left(\sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 \left(e^{-i\beta \cos^2 \theta_0} + \varepsilon \beta \sin 2\theta_0 e^{-i\beta \cos^2 \theta_0} \theta_1 \right) \right) \right|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= I_{in} \left| \sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 e^{-i\beta \cos^2 \theta_0} \left(1 + i\varepsilon \beta \sin 2\theta_0 e^{i\Lambda \nabla_{\perp}^2} \theta_1 \right) \right|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Nous pouvons observer que θ_1 est un vecteur propre de l'opérateur non local $e^{i\Lambda \nabla_{\perp}^2}$, lié à la valeur propre $e^{-i\Lambda k^2}$:

$$\begin{aligned}
 e^{i\Lambda\nabla_{\perp}^2}\theta_1 &= (\cos\Lambda\nabla_{\perp}^2 + i\sin\Lambda\nabla_{\perp}^2)\theta_1 \\
 &= \cos\Lambda\nabla_{\perp}^2\theta_1 + i\sin\Lambda\nabla_{\perp}^2\theta_1 \\
 &= \cos\Lambda k^2\theta_1 - i\sin\Lambda k^2\theta_1 \\
 &= e^{-i\Lambda k^2}\theta_1.
 \end{aligned}$$

Dans la deuxième étape, du calcul précédent, nous avons développé le cos et le sin en série de Taylor, et nous avons utilisé $(\nabla_{\perp}^2)^n\theta_1 = -k^{2n}\theta_1$. En remplaçant le résultat du calcul précédent dans I_w , nous obtenons une expression pour l'intensité de la lumière d'écriture qui dépend seulement du nombre d'onde de la perturbation k et sans l'opérateur de Laplace,

$$I_w = I_{in} \left| \sin\psi_1 \sin\psi_2 + \cos\psi_1 \cos\psi_2 e^{-i\beta \cos^2\theta_0} \left(1 + i\varepsilon\beta \sin 2\theta_0 e^{-i\Lambda k^2}\theta_1 \right) \right|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Nous définissons de nouvelles variables pour simplifier la notation dans la formule pour l'intensité de la lumière d'écriture :

$$a \equiv \sin\psi_1 \sin\psi_2 \quad ; \quad b \equiv \cos\psi_1 \cos\psi_2 \quad ; \quad \varphi_0 \equiv \beta \cos^2\theta_0 ,$$

avec ces définitions, l'expression de l'intensité de la lumière d'écriture I_w , devient un peu plus facile à manipuler. Nous obtenons au premier ordre en ε ,

$$\begin{aligned}
 I_w &= I_{in} \left| a + b e^{-i\varphi_0} + i\varepsilon\beta b \sin 2\theta_0 e^{-i(\Lambda k^2 + \varphi_0)}\theta_1 \right|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= I_{in} (a^2 + b^2 + 2ab \cos\varphi_0) + 2\varepsilon I_{in} \beta b \sin 2\theta_0 (a \sin(\Lambda k^2 + \varphi_0) + b \sin(\Lambda k^2)) \theta_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

En définissant encore de nouvelles variables, car seule la dépendance explicite en k nous intéresse

$$A \equiv \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos\varphi_0} \quad ; \quad B \equiv \beta b \sin 2\theta_0$$

nous avons, finalement, à l'ordre ε pour I_w

$$I_w = I_{in} A^2 + 2\varepsilon I_{in} B (a \sin(\Lambda k^2 + \varphi_0) + b \sin(\Lambda k^2)) \theta_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

ce qui nous donne la dépendance de l'intensité de la lumière d'écriture en fonction du nombre d'onde de la perturbation, au premier ordre en ε . L'équation (3.2) avec les variables définies en (3.4), nous donne l'équation qui va nous permettre d'obtenir la relation de dispersion

$$\partial_t \theta = \nabla_{\perp}^2 \theta - \theta + \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\Gamma V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha I_w(\theta, \nabla_{\perp})}} \right).$$

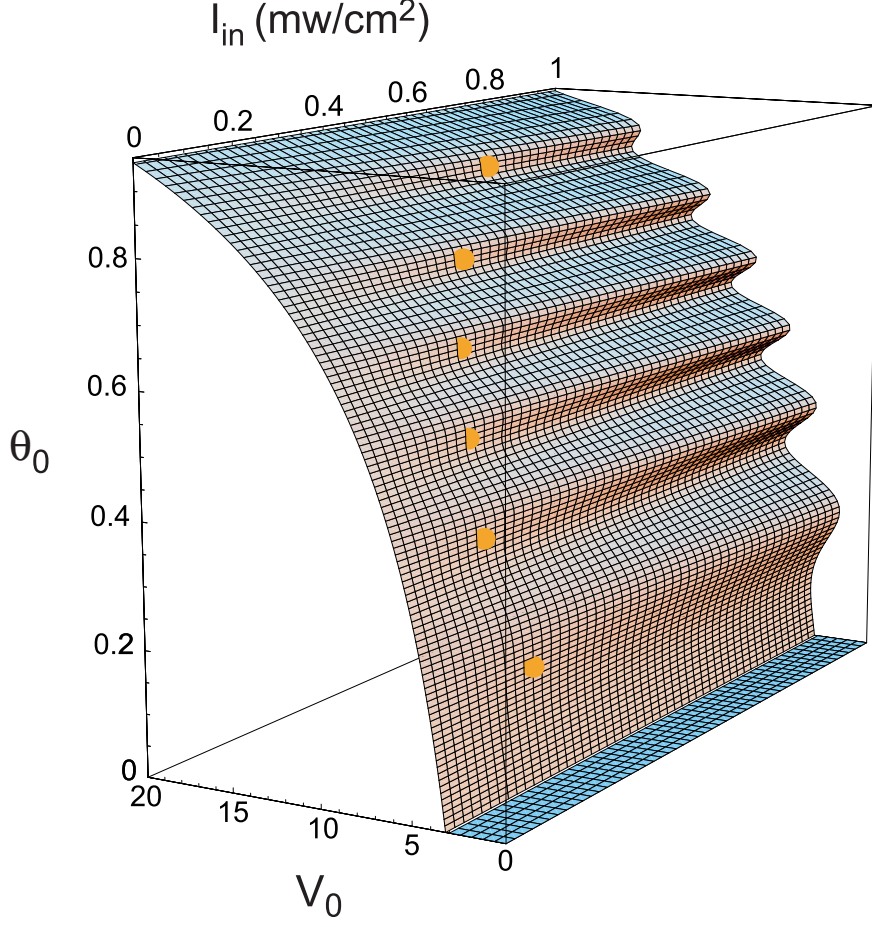


FIG. 3.9: La fonction multi-valuée $\theta_0(V_0, I_{in})$: les points représentent les seuils des régions de bistabilité.

Dans cette équation, nous remplaçons l'expression de l'intensité de la lumière d'écriture I_w par le résultat obtenu précédemment, et θ par la perturbation. Nous allons obtenir ainsi la relation entre σ et k ,

$$\begin{aligned} \sigma \varepsilon \theta_1 &= -k^2 \varepsilon \theta_1 - \varepsilon \theta_1 - \theta_0 + \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\Gamma V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha I_{in} A^2 + 2\varepsilon \alpha I_{in} B (a \sin(\Lambda k^2 + \varphi_0) + b \sin(\Lambda k^2)) \theta_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}} \right) \\ \sigma \varepsilon \theta_1 &= -k^2 \varepsilon \theta_1 - \varepsilon \theta_1 - \theta_0 + \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\Gamma V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha I_{in} A^2}} \left(1 - \frac{\varepsilon \alpha I_{in} B}{\Gamma V_0 + \alpha I_{in} A^2} (a \sin(\Lambda k^2 + \varphi_0) + b \sin(\Lambda k^2)) \theta_1 \right) \right) \end{aligned}$$

Mais nous savons grâce à l'équation (3.5) que la variable θ_0 est liée à l'intensité de la lumière initiale I_{in} et au potentiel V_0 par la relation suivante

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\Gamma V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha I_{in} A^2}} \right).$$

Il faut noter que θ_0 est une fonction multi-valuée, comme nous pouvons le voir sur le diagramme de la figure (3.9). Ceci vient du fait que la variable A dépend aussi de θ_0 . Dans cette figure, les points marquent le début de la bistabilité. Cependant, nous pouvons exprimer V_0 en fonction de I_{in} et θ_0 , et nous avons alors une vraie fonction uni-valuée

$$V_0 = \frac{V_{FT}}{\left(1 - \frac{2\theta_0}{\pi}\right)^2} - \frac{\alpha I_{in} A^2}{\Gamma}$$

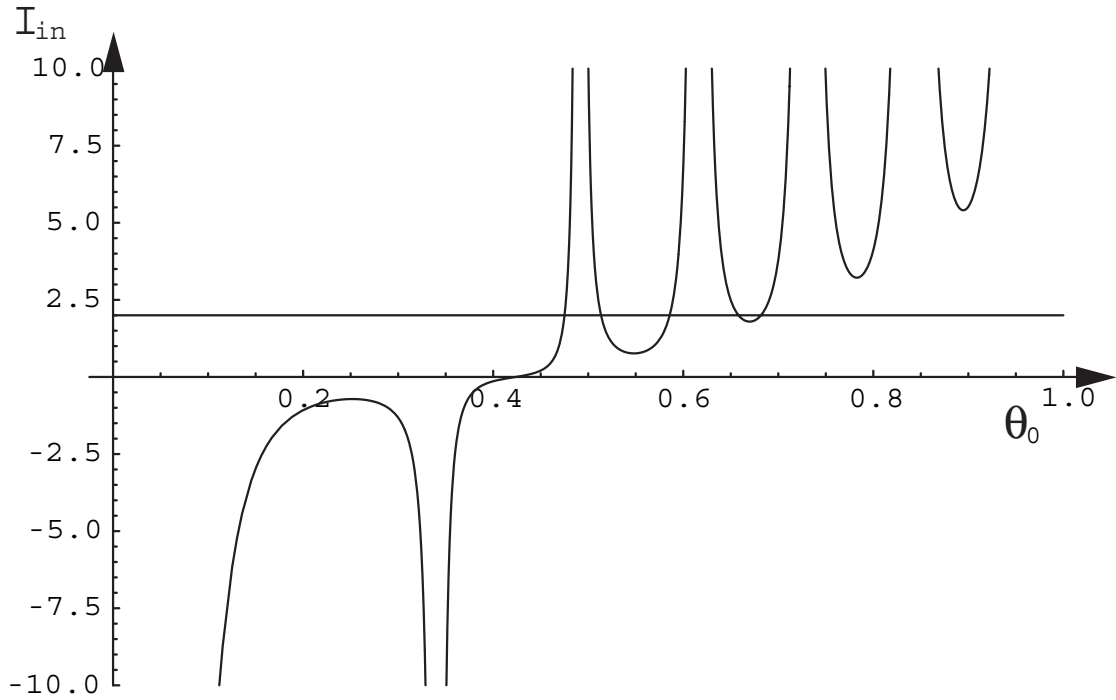


FIG. 3.10: L'intensité de la lumière initiale I_{in} en fonction de θ_0 pour une valeur donnée du potentiel $V_0 = 6.0 V$.

Nous pouvons aussi exprimer I_{in} en fonction de V_0 et θ_0 , ce qui nous donne aussi une fonction uni-valuée. Le graphique de cette fonction dans la figure (3.10) représente le plan $V_0 = const$ dans la figure (3.9). La ligne horizontale de la figure (3.10) représente le niveau minimal d'intensité pour que la solution stationnaire devienne instable, au-dessus de cette ligne la solution stationnaire est instable et en-dessous elle est stable. La partie négative n'a pas de signification physique. Nous voyons que, pour une valeur de θ_0 donnée, il y a un seul état possible, mais pour une valeur de I_{in} donnée, il y a plusieurs états (multi-stabilité).

$$I_{in} = \frac{\Gamma}{\alpha A^2} \left(\frac{V_{FT}}{\left(1 - \frac{2\theta_0}{\pi}\right)^2} - V_0 \right) \quad .$$

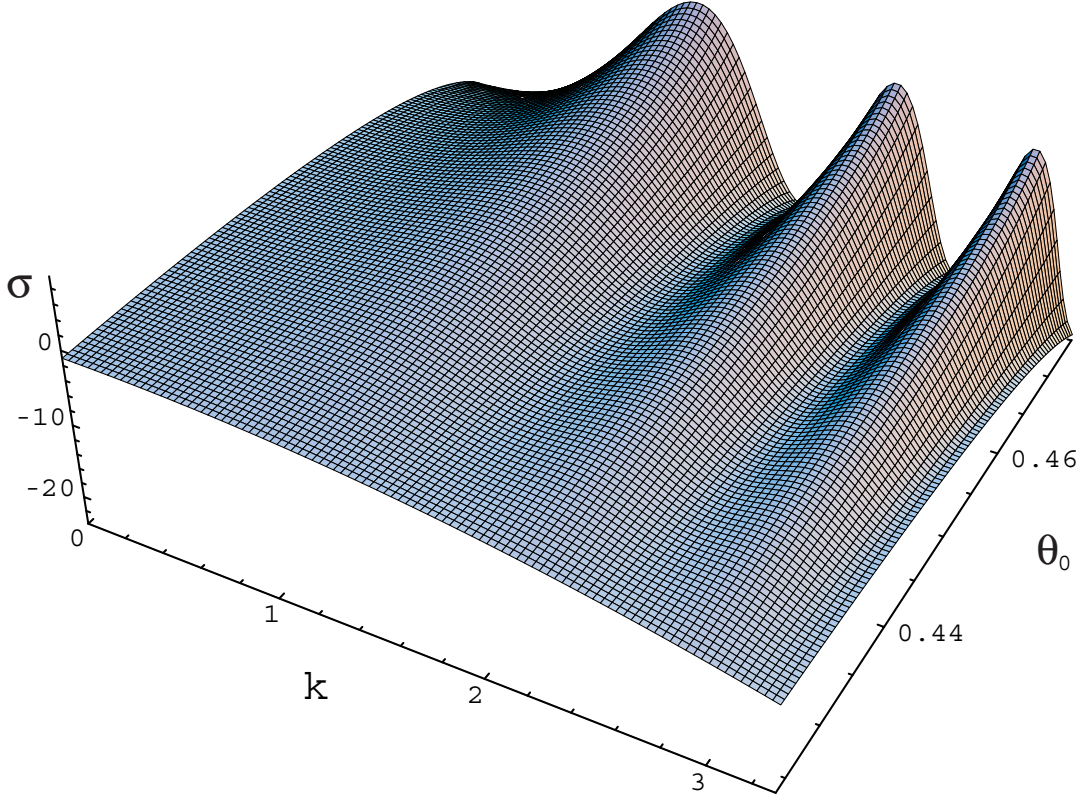


FIG. 3.11: La relation de dispersion σ en fonction de k et θ_0 , $\sigma = \sigma(k, \theta_0)$ pour $V_0 = 6.0 V$.

Avec ces équations, nous obtenons la relation de dispersion $\sigma(k)$ suivante

$$\sigma = -k^2 - 1 + \frac{\pi \alpha I_{in} \beta b \sqrt{\Gamma V_{FT}} \sin 2\theta_0}{2 (\Gamma V_0 + \alpha I_{in} A^2)^{3/2}} (a \sin(\Lambda k^2 + \varphi_0) + b \sin(\Lambda k^2)), \quad (3.6)$$

où

$$A^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 + \sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \cos \varphi_0).$$

Le graphique de la relation de dispersion est représenté dans les figures (3.11) et (3.12). Dans la première figure, la relation de dispersion σ est dessinée en fonction du nombre d'onde k et de la valeur de la solution stationnaire θ_0 , et elle montre comment les modes instables apparaissent quand on augmente la valeur de θ_0 . Dans la deuxième figure, nous voyons plus clairement cette apparition. Cette figure montre des coupes transverses de la figure (3.11) pour différentes valeurs de θ_0 . Nous augmentons la valeur de θ_0 de 0.424 à 0.471 ce qui est équivalent, dans cet intervalle, à augmenter l'intensité de la lumière I_{in} de 0.000 à 1.165 mW/cm^2 . La figure (3.12) montre donc l'apparition des modes instables quand on augmente l'intensité de la lumière. Dans le graphique (a) l'intensité est nulle et la relation de dispersion est monotone décroissante et toujours négative, alors la solution

stationnaire est stable. Quand on augmente l'intensité, σ commence à montrer des oscillations mais elle reste encore négative (graphique (b)). Si on augmente encore l'intensité, les oscillations commencent à grandir pour atteindre à l'axe horizontal (graphique d)) et quand ils le traversent (graphique (e) et (f)), la solution stationnaire n'est plus stable. Le mode le plus instable est celui qui passe le premier à travers l'axe horizontal (graphique (d)).

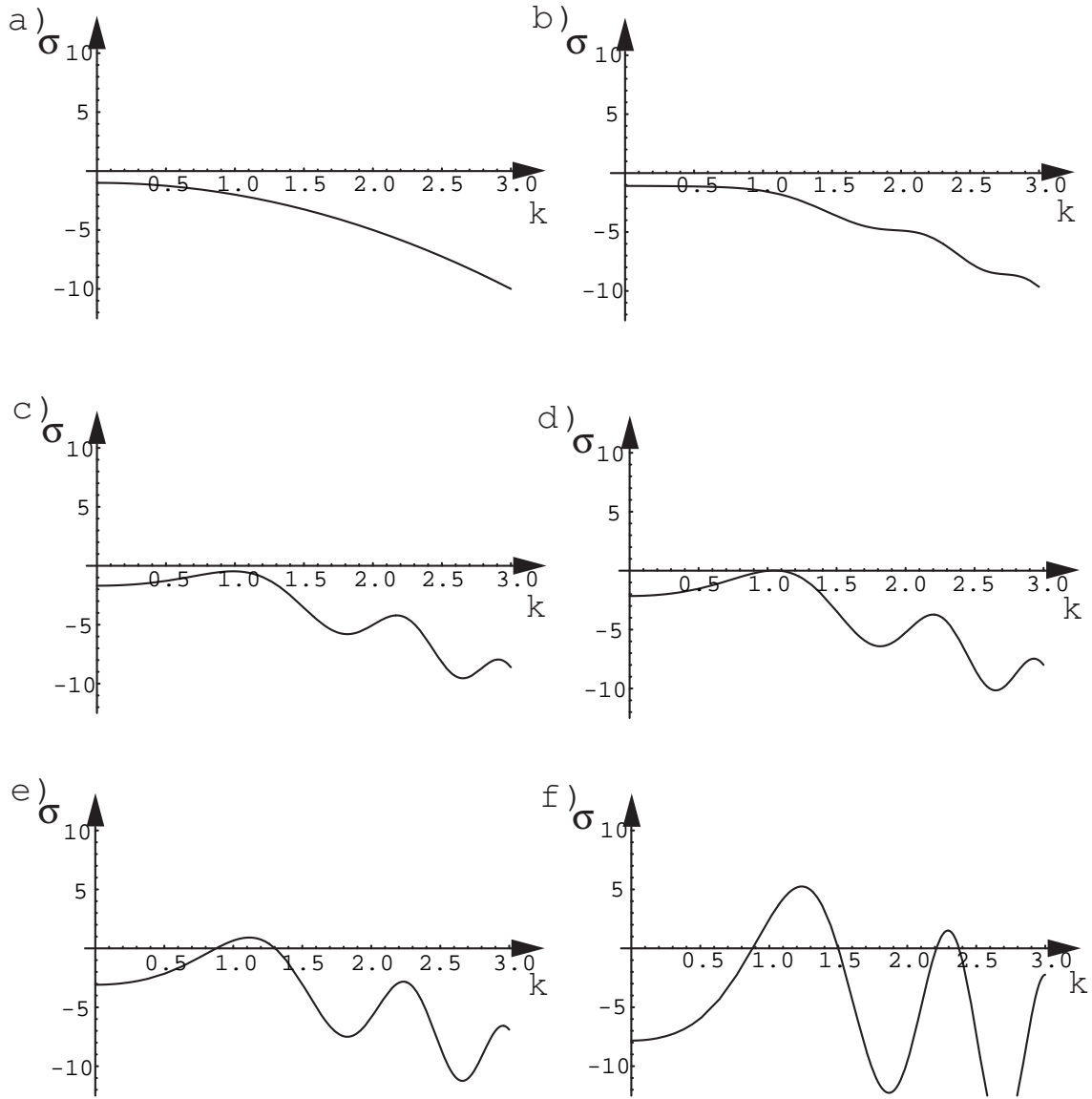


FIG. 3.12: La relation de dispersion $\sigma(k)$ pour $V_0 = 6.0 V$ et $\theta_0 =$ a) 0.424 ($I_{in} = 0.000$), b) 0.429 ($I_{in} = 0.031$), c) 0.441 ($I_{in} = 0.104$), d) 0.447 ($I_{in} = 0.163$), e) 0.453 ($I_{in} = 0.250$) et f) 0.471 ($I_{in} = 1.165 mW/cm^2$).

Nous pouvons arranger l'équation (3.6) avec un peu de trigonométrie. Nous définissons un nouveau paramètre pour simplifier la notation. Soit

$$\chi \equiv \frac{\pi \alpha I_{in} \beta b A \sqrt{\Gamma V_{FT}} \sin 2\theta_0}{2 (\Gamma V_0 + \alpha I_{in} A^2)^{3/2}}.$$

Alors, la relation de dispersion s'écrit

$$\sigma = -k^2 - 1 + \frac{\chi}{A} \left(a \sin(\Lambda k^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_0}{2}) + b \sin(\Lambda k^2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\varphi_0}{2}) \right)$$

$$\sigma = -k^2 - 1 + \frac{\chi}{A} \left((a - b) \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos(\Lambda k^2 + \frac{\varphi_0}{2}) + (a + b) \cos \frac{\varphi_0}{2} \sin(\Lambda k^2 + \frac{\varphi_0}{2}) \right)$$

$$\sigma = -k^2 - 1 - \frac{\chi}{A} \left(\cos(\psi_1 + \psi_2) \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos(\Lambda k^2 + \frac{\varphi_0}{2}) - \cos(\psi_1 - \psi_2) \cos \frac{\varphi_0}{2} \sin(\Lambda k^2 + \frac{\varphi_0}{2}) \right).$$

En définissant un nouvel angle ϕ ,

$$\cos \phi \equiv \frac{1}{A} \cos(\psi_1 + \psi_2) \sin \frac{\varphi_0}{2} \quad ; \quad \sin \phi \equiv \frac{1}{A} \cos(\psi_1 - \psi_2) \cos \frac{\varphi_0}{2},$$

nous pouvons voir clairement le cosinus de la somme et obtenir la relation de dispersion, pour les modes les plus instables, sous la forme

$$\sigma = -k^2 - 1 - \chi \cos(\Lambda k^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \phi).$$

La figure (3.13 (a)) montre la valeur de la solution stationnaire homogène θ_0 vs I_{in} et la figure (3.13 (b)) montre les ballons d'instabilité k vs I_{in} , pour $\Gamma = 0.5$, $V_{FT} = 3.0 V$, $l = 30 \mu m$, $\lambda = 632 nm$, $L = -40 mm$ et $\psi_1 = -\psi_2 = 45^\circ$. Ceux-ci sont en accord qualitatif avec le changement de nombre d'onde qui accompagne l'apparition des pics localisés et la transition de P_1 vers P_3 . Il faut noter que P_1 bifurque avec un nombre d'onde critique $k_1 \neq 0$ (instabilité de type I selon la classification de Cross-Hohenberg [37] (voir aussi la figure (3.12) graphique (d))), alors que P_2 et P_3 sont accompagnés par l'apparition d'une bande à grande longueur d'onde avec un nombre d'onde critique zéro. Ces bifurcations ne peuvent pas être proprement classifiées comme type II, car les deux bandes instables bifurquent de manière sous-critique en fonction de I_{in} . Par conséquent, il est toujours possible d'identifier les deux modes les plus instables, $k_{2max} \neq 0$ et $k_{3max} \neq 0$, correspondant, respectivement, aux maxima de σ pour P_2 et P_3 . Dans les trois ballons d'instabilité, les maxima de σ , σ_{max} , sont indiqués sur la figure (3.13 (b)) par les trois lignes en pointillés.

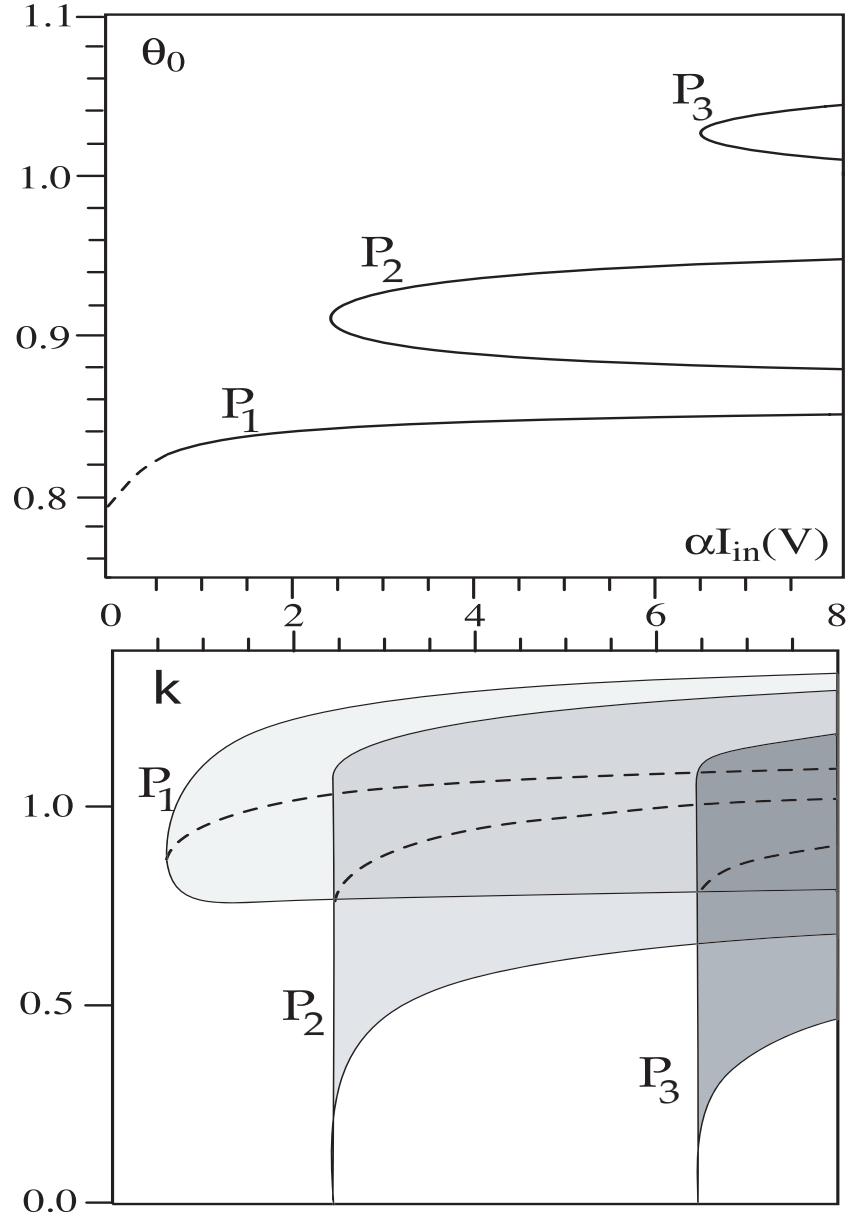


FIG. 3.13: a) La solution stationnaire homogène θ_0 en fonction de I_{in} , b) ballons d'instabilité k vs I_{in} pour $V_0 = 12.3 V$.

Il faut dire que dans les expériences il y a aussi trois branches qui apparaissent sur le diagramme de bifurcation, mais elles ne sont pas nécessairement issues de la déstabilisation des trois états homogènes correspondants. En effet, il existe aussi la possibilité que la deuxième branche instable présente une instabilité secondaire, donnant lieu à une troisième branche de solutions. Pour plus de détails sur l'aspect expérimental voir la thèse de Umberto Bortolozzo [13].

Pour calculer les modes les plus instables dans la relation de dispersion, nous la dérivons par rapport à k et nous annulons cette dérivée pour obtenir les points extrêmes, mais seuls les points maximaux nous intéressent.

$$\frac{d\sigma}{dk} = -2k \left(1 - \chi\Lambda \sin(\Lambda k^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \phi) \right).$$

Nous obtenons

$$\left. \frac{d\sigma}{dk} \right|_{k_0} = 0 \Rightarrow k_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(\Lambda k_0^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \phi) = \frac{1}{\chi\Lambda}. \quad (3.7)$$

Nous voyons que $k_0 = 0$ est toujours un extremum, mais cela vient du fait que la relation de dispersion est une fonction paire de k . Il est plus intéressant de constater que la condition nécessaire et suffisante pour avoir d'autres extremums est

$$|\chi\Lambda| \geq 1.$$

Pour voir si un extremum est un maximum ou un minimum, nous devons dériver encore une fois la dérivée de la relation de dispersion

$$\frac{d^2\sigma}{dk^2} = -2 \left(1 - \chi\Lambda \sin(\Lambda k^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \phi) \right) + 4\Lambda^2 k^2 \chi \cos(\Lambda k^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \phi).$$

Nous avons deux cas $k_0 = 0$ ou $k_0 \neq 0$:

Si $k_0 = 0$

$$\frac{d^2\sigma}{dk^2} = -2 \left(1 - \chi\Lambda \sin(\frac{\varphi_0}{2} + \phi) \right),$$

et si $|\chi\Lambda| < 1$, alors $k_0 = 0$ est toujours un maximum, c'est le seul extremum du système et la relation de dispersion est toujours décroissante, c'est-à-dire que $k_0 = 0$ est le maximum global du système. Si $|\chi\Lambda| \geq 1$ il va y avoir d'autres extremums (maxima et minima) et $k_0 = 0$ peut être un minimum.

Si $k_0 \neq 0$

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dk^2} \right|_{k_0} = 4\Lambda^2 k_0^2 \chi \cos(\Lambda k_0^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \phi) \quad (3.8)$$

et de (3.7)

$$\sin(\Lambda k_0^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \phi) = \frac{1}{\chi\Lambda}.$$

Nous remplaçons dans l'équation (3.8) et nous obtenons

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dk^2} \right|_{k_0} = 4\Lambda^2 k_0^2 \chi \sqrt{1 - \frac{1}{(\chi\Lambda)^2}},$$

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dk^2} \right|_{k_0} = 4\Lambda k_0^2 \sqrt{(\chi\Lambda)^2 - 1}.$$

De l'équation (3.7) nous obtenons les valeurs des extremums de la relation de dispersion

$$k_0 = \sqrt{\frac{1}{\Lambda} \left((-1)^n \arcsin \frac{1}{\chi\Lambda} + n\pi - \frac{\varphi_0}{2} - \phi \right)} \quad \text{et} \quad n > \frac{1}{\pi} \left(\frac{\varphi_0}{2} + \phi - (-1)^n \arcsin \frac{1}{\chi\Lambda} \right)$$

Nous ne sommes pas intéressés par tous les extremums, mais seulement par ceux qui maximisent la relation de dispersion. Avec l'équation (3.8), nous pouvons déterminer la nature des extremums :

Si $\chi \cos(\Lambda k_0^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \phi) > 0$, alors k_0 est un minimum.

Si $\chi \cos(\Lambda k_0^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \phi) < 0$, alors k_0 est un maximum.

Si $\chi \cos(\Lambda k_0^2 + \frac{\varphi_0}{2} + \phi) = 0$, nous ne pouvons pas déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum de la relation de dispersion et il faudra examiner les dérivées d'ordre supérieur.

Les graphiques des extremums de la relation de dispersion, quand ce sont des maxima, sont représentés dans la figure (3.13 (b)) par les lignes en pointillés.

Nous allons voir maintenant quelques cas particuliers pour les angles de polarisation ψ_1 et ψ_2 :

- Si $\psi_1 + \psi_2 = \pi/2$, nous avons $a = b = 1/2 \sin(2\psi_1)$, $A = \sin(2\psi_1) \cos(\varphi_0/2)$, $\phi = \pi/2$.
Alors

$$\chi \propto 1 / \cos \left(\frac{\beta}{2} \cos^2 \theta_0 \right),$$

ce qui veut dire, qu'il y aura des valeurs de θ_0 pour lesquelles la relation de dispersion va être indéfinie

$$\theta_{0_m} = \arccos \sqrt{\frac{(2m+1)\pi}{\beta}},$$

où $m \in \mathbb{Z}$. Nous allons voir un effet similaire dans le cas suivant et nous allons voir un peu plus en détail sa signification.

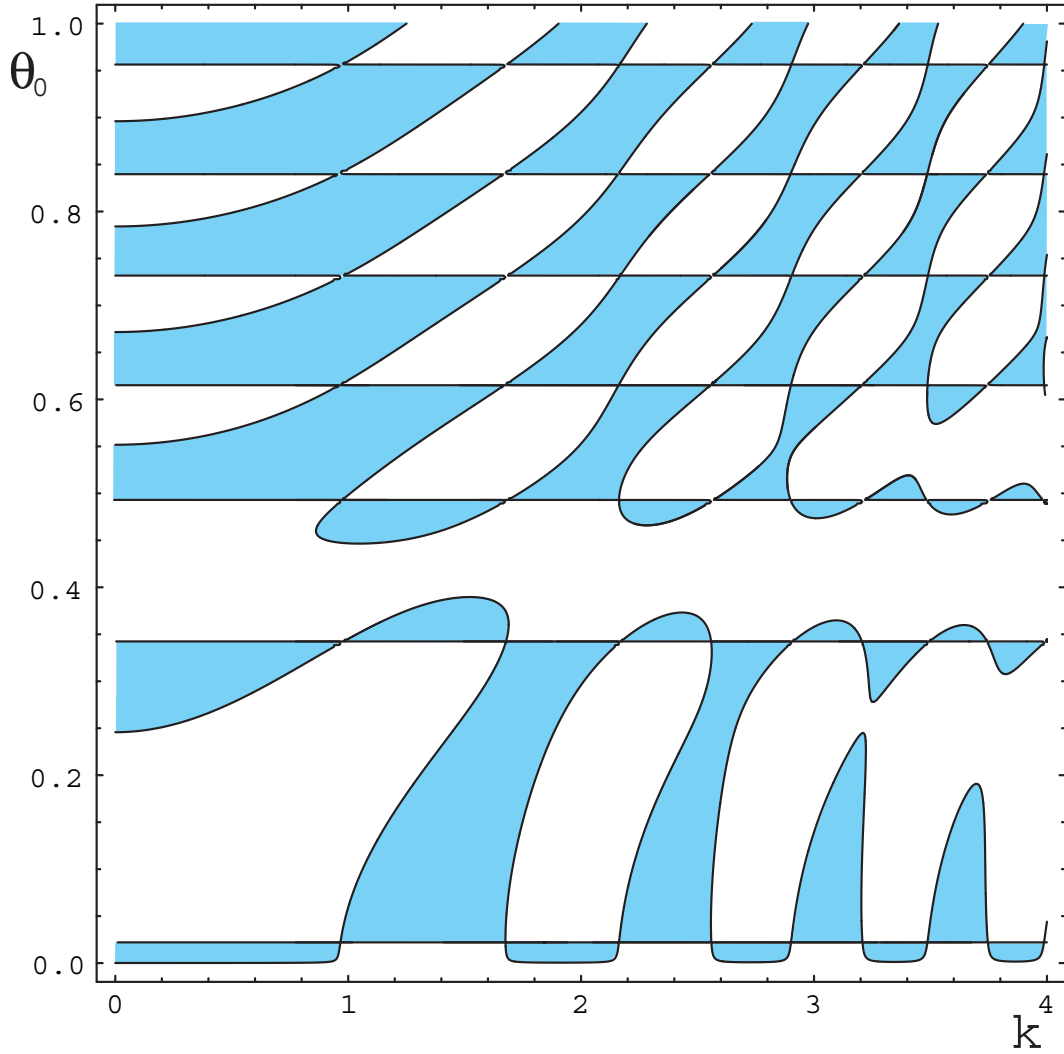


FIG. 3.14: Frontière entre les régimes stable et instable dans le diagramme de k vs θ_0 , $\sigma(k, \theta_0) = 0$, pour $\psi_1 = -\psi_2 = 45^\circ$.

- Si $\psi_1 - \psi_2 = \pi/2$, nous avons $a = -b = -1/2 \sin(2\psi_1)$, $A = -\sin(2\psi_1) \sin(\varphi_0/2)$, $\phi = 0$. Alors

$$\chi \propto 1 / \sin \left(\frac{\beta}{2} \cos^2 \theta_0 \right),$$

ce qui veut dire qu'il y aura aussi, comme dans la cas précédent, des valeurs de θ_0 pour lesquelles la relation de dispersion va être indéfinie

$$\theta_{0m} = \arccos \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}},$$

où $m \in \mathbb{Z}$. En ces points, l'intensité de la lumière I_{in} va vers l'infini parce que

$$I_{in} \propto 1/A^2 = 1/\left(\sin(2\psi_1) \sin^2\left(\frac{\beta}{2} \cos^2 \theta_0\right)\right).$$

Les θ_{0m} correspondent aux changements de branche dans la figure (3.13 (a)) et sont représentés par les lignes horizontales dans la figure (3.14) qui marquent aussi les frontières entre les régimes stable (blanc) et instable (bleu). Ces lignes horizontales correspondent à une intensité de lumière infinie, $I_{in} = \infty$. Ces lignes montrent que nous avons toujours la bistabilité pour une intensité suffisamment grande et pour $0 < \psi_1 < \pi/2$, mais quand $\psi_1 \rightarrow 0$ ou $\psi_1 \rightarrow \pi/2$, l'intensité nécessaire pour arriver à la région de bistabilité devient infinie. L'intensité minimale pour être bistable est obtenue quand $\psi_1 = \pi/4$. Toutes ces conclusions peuvent aussi être obtenues pour le cas précédent.

- Si $\psi_1 = \psi_2$, nous avons $a = \sin^2 \psi_1$, $b = 1 - a = \cos^2 \psi_1$,

$$A = \sqrt{1 - \sin^2(2\psi_1) \sin^2(\varphi_0/2)}$$

et $\sin \phi = \frac{1}{A} \cos \frac{\varphi_0}{2}$. Dans ce cas-là, les structures localisées ont été étudiées expérimentalement en détail en fonction de ψ_1 dans les références [71, 72]. Il a été observé que la région d'existence des structures localisées est l'intervalle $38^\circ \lesssim \psi_1 \lesssim 54^\circ$ et pour l'angle $\psi_1 = 45^\circ$, le contraste entre la structure localisée et le fond est maximale.

- Si $\psi_1 = -\psi_2$, nous avons $a = -\sin^2 \psi_1$, $b = 1 + a = \cos^2 \psi_1$,

$$A = \sqrt{1 - \sin^2(2\psi_1) \cos^2(\varphi_0/2)}$$

et $\cos \phi = \frac{1}{A} \sin \frac{\varphi_0}{2}$. L'intensité de la lumière est

$$I_{in} \propto 1/A^2 = 1/(1 - \sin^2(2\psi_1) \cos^2(\varphi_0/2)).$$

Nous en déduisons que pour $\psi_1 = 45^\circ$, il y a des valeurs de θ_0 pour lesquelles I_{in} va à l'infini, ce qui veut dire que le système présente une bistabilité. Par contre, pour les valeurs $\psi_1 = 0^\circ$ et $\psi_1 = 90^\circ$, l'intensité est une fonction monotone de θ_0 , c'est-à-dire, il n'y a pas de bistabilité. Alors, il existe deux valeurs $0 < \psi_a < 45^\circ$ et $45^\circ < \psi_b < 90^\circ$, tel que le système est bistable dans l'intervalle $\psi_a < \psi_1 < \psi_b$ et seulement dans cet intervalle.

Une solution stationnaire homogène θ_0 , est instable s'il existe une perturbation de nombre d'onde k telle que sa dépendance temporelle est exponentiellement croissante, c'est-à-dire, $\sigma(k, \theta_0) > 0$. Les courbes pour lesquelles la relation de dispersion est nulle sont la frontière entre les régimes stable et instable. Les courbes dans l'espace des paramètres k vs θ_0 , sont montrées dans le graphique de la figure (3.14), pour les angles des polariseurs $\psi_1 = -\psi_2 = 45^\circ$, ce qui correspond aux cas $\psi_1 - \psi_2 = \pi/2$ et $\psi_1 = -\psi_2$.

Une séquence typique d'images que l'on observe en augmentant I_{in} est montrée sur la figure (3.15) (voir aussi la figure (3.13)). Pour de faibles intensités on observe la structure P_1 , issue de la bifurcation de l'état homogène vers un état périodique (figure (3.15a)). Ensuite, comme montré sur la figure (3.15b), des pics localisés apparaissent sur P_1 . Nous appelons ces pics P_{12} , car, selon notre conjecture, ils proviennent d'un processus de nucléation de P_2 sur P_1 . En augmentant ultérieurement I_{in} , il apparaît des pics localisés d'amplitude plus élevée, que nous appelons P_{13} , car provenant de la nucléation de P_3 sur P_1 .

Pour des valeurs intermédiaires de I_{in} , comme dans la figure (3.15c et d), P_{13} et P_{12} coexistent dans les mêmes régions de l'espace [13, 16].

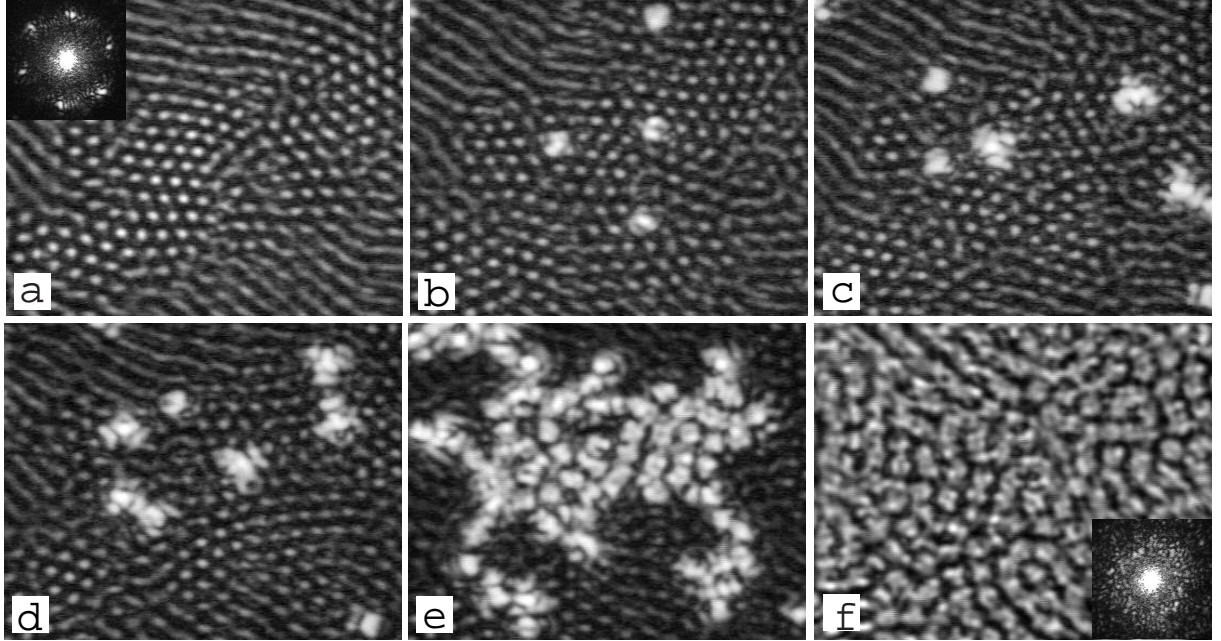


FIG. 3.15: Séquence d'images montrant la nucléation des pics localisés : I_{in} = a) 0.32, b) 0.38, c) 0.40, d) 0.41, e) 0.42 et f) 0.52 mW/cm^2 . Dans les insertions sur a) et f) sont montrées les images de champ lointain pour P_1 et P_3 , respectivement.

3.6 Forme Normale et Modèle Théorique de Pics Localisés

Dans cette section nous allons montrer que les pics localisés sont une classe générique des états localisés qui apparaissent chaque fois qu'un système est le siège d'une coexistence entre deux états spatialement périodiques. Pour donner une description unifiée des pics localisés, nous développons un modèle théorique unidimensionnel. Le modèle est basé

sur une équation d'amplitude (forme normale) qui inclut un forçage paramétrique spatial. Cette extension par rapport aux équations d'amplitudes conventionnelles, permet de décrire les pics localisés et tient compte de l'interaction de l'enveloppe qui varie lentement, avec la petite échelle de la solution périodique sous-jacente [11], bien connu comme effet non-adiabatique, que nous avons étudié dans le chapitre (1) [29, 70].

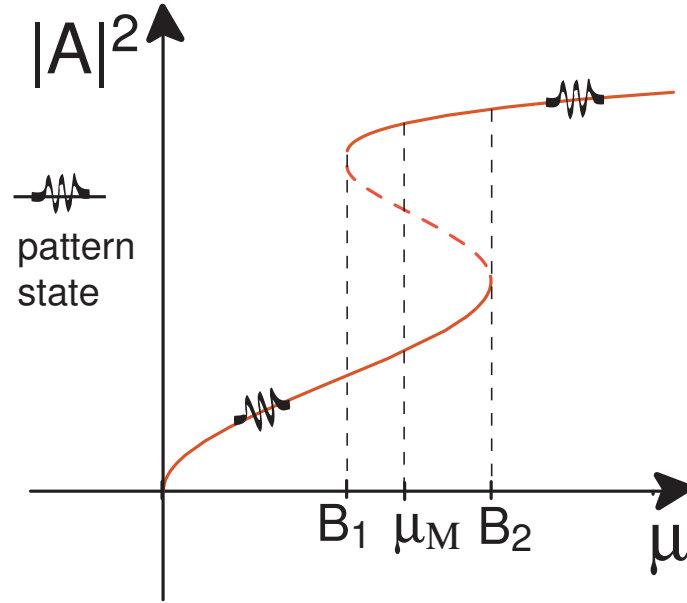


FIG. 3.16: Diagramme de bifurcation d'une bifurcation super-sous-critique : l'intervalle $[B_1, B_2]$ est la région de bistabilité entre deux états périodiques et μ_M est le point de Maxwell.

En général, le principal ingrédient pour l'apparition de pics localisés est la coexistence entre deux états périodiques dans l'espace. Pour donner une description générique de cette situation, nous considérons un système qui a une bifurcation super-sous-critique, c'est-à-dire, la première bifurcation est super-critique et la deuxième est sous-critique. Dans la figure (3.16) on voit le diagramme de bifurcation typique d'une instabilité super-sous-critique. Soit $\vec{u}(x, t)$ un champ de vecteurs qui décrit le système que nous étudions et qui satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t \vec{u} = \vec{f}(\vec{u}, \partial_x, \{\lambda_i\}),$$

où $\{\lambda_i\}$ est un ensemble de paramètres. Pour une valeur critique d'un des paramètres, le système a une instabilité spatiale avec un nombre d'onde donné q . Près de cette instabilité spatiale, nous supposons que la solution a la forme $\vec{u} = A(X, T)e^{iqx}\hat{u} + \bar{A}(X, T)e^{-iqx}\hat{u} + \dots$ et l'amplitude satisfait [37]

$$\partial_T A = \mu A - \nu |A|^2 A + \alpha |A|^4 A - |A|^6 A + \partial_{XX} A, \quad (3.9)$$

où μ est le paramètre de bifurcation et $\{\nu, \alpha\}$ contrôlent le type de bifurcation (premier ou deuxième ordre dépendant du signe de ces coefficients). Les termes d'ordre supérieur sont négligés par l'analyse des échelles, parce que $\nu \sim \mu^{2/3}$, $\alpha \sim \mu^{1/3}$, $|A| \sim \mu^{1/6}$, $\partial_t \sim \mu$, $\partial_x \sim \mu^{1/2}$ et $\mu \ll 1$. Notez que cette équation est invariante de phase ($A \rightarrow Ae^{i\varphi}$), mais le système initial n'a pas cette symétrie.

Comme on voit dans la figure (3.16), pour un intervalle des valeurs du paramètre le système permet la coexistence entre deux états spatialement périodiques différents, chacun correspond à un état homogène pour l'équation d'amplitude. La région de coexistence est pour $B_1 < \mu < B_2$. En écrivant $A = Re^{i\varphi}$, nous pouvons voir que l'état d'équilibre dans l'équation d'amplitude a la forme

$$A = R_0 e^{i \frac{\varepsilon}{R_0^2} x},$$

où $\mu - \varepsilon^2/R_0^4 - \nu R_0^2 + \alpha R_0^4 - R_0^6 = 0$ et ε est une constante arbitraire liée à l'invariance de phase initiale. Il faut noter que dans le cas ε positif, le nombre d'onde de la structure spatiale est modifié avec l'inverse du carré de l'amplitude R_0^2 , ainsi que les structures avec la plus grande amplitude ont les plus petits nombres d'onde. Par contre, quand ε est négatif, les structures avec amplitude plus grande ont des longueurs d'onde plus petites. Dans la figure (3.17), on montre deux structures périodiques différentes qui coexistent pour les mêmes valeurs de paramètres. Ici ε est négatif, donc la structure avec la plus grande amplitude a la longueur d'onde la plus petite.

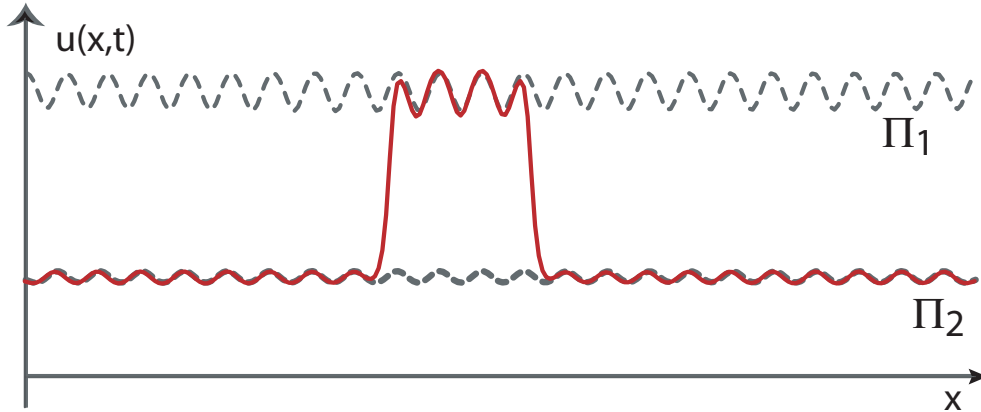


FIG. 3.17: Un état localisé obtenu à partir de l'équation (3.11), pour $\mu = 0.57$, $\nu = 0.43$, $\alpha = 2.87$, $q = 12.00$ et $\eta = 0.03$. Les lignes en pointillés représentent les deux solutions périodiques qui coexistent pour les mêmes valeurs de paramètres.

Notez que l'équation d'amplitude précédente est variationnelle et elle peut être écrite

$$\partial_t A = - \frac{\delta \mathcal{F}[A, \bar{A}]}{\delta \bar{A}},$$

où

$$\mathcal{F} = \int \left(-\mu |A|^2 + \nu \frac{|A|^4}{2} - \alpha \frac{|A|^6}{3} + \frac{|A|^8}{4} + |\partial_X A|^2 \right) dx.$$

Pour des valeurs données des paramètres, les deux états stables de l'équation (3.9) ont la même énergie, c'est-à-dire, le système est au point de Maxwell, où le front entre les deux états est immobile [33]. Pour avoir des solutions localisées, on considère l'interaction entre deux fronts immobiles près du point de Maxwell. Comme conséquence du comportement du front à l'infini, l'interaction entre les fronts est attractive et a la forme

$$\dot{\Delta} = -ae^{-\lambda\Delta} + \delta, \quad (3.10)$$

où Δ est la distance entre les cœurs de chaque front, δ est la séparation du point de Maxwell ($\mu - \mu_M$), λ caractérise la décroissance exponentielle du front vers une valeur constante à l'infini, et a est un coefficient positif qui caractérise les propriétés de l'interaction et est déterminé par la forme du front. La méthode pour faire ce calcul est la même que celle qu'on a vu dans les exemples (1.2.1) et (1.2.2) du premier chapitre. L'équation (3.10) a un point fixe instable $\Delta^* = -\ln(a/\delta)/\lambda$ qui est la barrière de nucléation entre les deux états homogènes. Alors, l'équation d'amplitude (3.9) ne présente pas des états localisés stables, à cause de la séparation d'échelle utilisée pour obtenir l'équation d'amplitude. Mais, près du cœur du front, cette supposition n'est plus valable. En fait, dans cette position la variation lente de l'enveloppe $A(X, T)$ présente des oscillations de la même taille que celle de la structure sous-jacente (ou similaire). Ce phénomène est appelé effet non-adiabatique (chapitre (1)).

Pour prendre en compte cet effet, nous modifions l'équation d'amplitude pour inclure les termes non résonants (adiabatiques). Ainsi, l'équation d'amplitude devient

$$\partial_T A = \mu A - \nu |A|^2 A + \alpha |A|^4 A - |A|^6 A + \partial_{XX} A + \sum_{m,n \geq 0} g_{mn} A^m \bar{A}^n e^{i \frac{q(n-m+1)}{\sqrt{\mu}} X}$$

où g_{mn} sont des nombres réels d'ordre un. Maintenant, l'équation d'amplitude a un forçage paramétrique dans l'espace dû aux termes non résonants. On note que la solution pour \vec{u} présente la symétrie $\{x \rightarrow -x, A \rightarrow \bar{A}\}$ et $\{x \rightarrow x + x_o, A \rightarrow A e^{iqx_o}\}$. Par conséquent, l'équation de l'enveloppe est aussi invariante par cette transformation. En revanche, les invariances par translation spatiale et de phase sont des symétries indépendantes de l'équation (3.9).

Pour comprendre et illustrer l'effet des termes non résonants nous gardons le terme le plus important (les autres sont exponentiellement petits en comparaison avec celui-ci). L'équation d'amplitude prend la forme suivante

$$\partial_T A = \mu A - \nu |A|^2 A + \alpha |A|^4 A - |A|^6 A + \partial_{XX} A + \eta A^2 e^{-i \frac{q}{\sqrt{\mu}} X}. \quad (3.11)$$

Maintenant l'amplitude est spatialement forcée avec fréquence $q/2\pi\sqrt{\mu}$ et amplitude η .

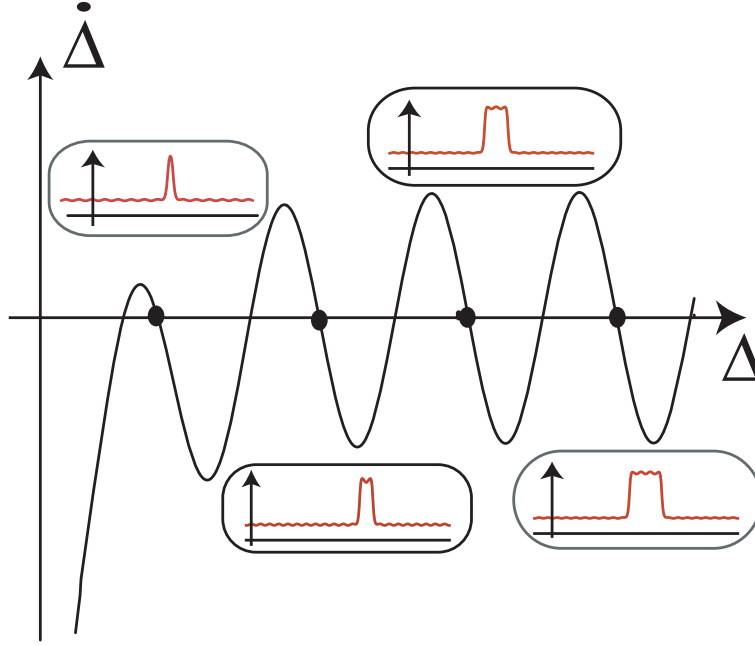


FIG. 3.18: Force d'interaction oscillatoire entre deux fronts. Les points représentent les structures localisées qui sont montrées dans les petites figures.

Le forçage spatial est responsable du fait que les états homogènes deviennent spatialement périodiques. Par conséquent, les fronts entre les états périodiques ont un intervalle « *d'accrochage* » (voir figure (1.11)). Il faut dire que le modèle (3.11) est le plus simple qui montre des solutions fronts entre deux états spatialement périodiques.

Notez que le maximum de l'enveloppe correspond au maximum de la solution périodique initiale. Pour obtenir le changement de l'interaction des fronts comme un résultat du forçage spatial, nous considérons la solution front de l'équation résonante $A_{\pm}(x - x_o) = R_{\pm}(x - x_o)e^{i\varepsilon/R_{\pm}^2}$, où $R_{\pm}(x - x_o)$ satisfait

$$\mu R - \nu R^3 + \alpha R^5 - R^7 + \partial_{xx} R - \frac{\varepsilon}{R^3} = 0,$$

x_o est la position du cœur du front et l'indice + (-) correspond à un front monotone croissant (décroissant). Comme le terme non résonant est une oscillation spatiale rapide, nous le considérons comme une perturbation au système et nous reportons la solution de la forme

$$A = R_+(x - x_1(t)) + R_-(x - x_2(t)) - (R_{o,+} - R_{o,-}) + \delta W e^{\delta\varphi},$$

dans l'équation (3.11), où δW et $\delta\varphi$ sont des perturbations et $R_{o,\pm}$ sont les états d'équilibre stables de l'équation (3.9) et $R_{o,+} > R_{o,-}$. Nous obtenons la condition de solvabilité suivante pour la fonction δW

$$\dot{\Delta} = -ae^{-\lambda\Delta} + \delta + \gamma \cos\left(\frac{q}{\sqrt{\mu}}\Delta\right), \quad (3.12)$$

avec

$$a = -2 \langle 3\mu R_+ - 5\nu R_+^3 + 7\alpha R_+^5 - 3R_+^7 | \partial_x R_+ \rangle$$

$$\delta = \frac{F(R_+) - F(R_-)}{\langle \partial_x R_+ | \partial_x R_+ \rangle},$$

$$\gamma = \eta \langle \partial_x R_+ | R_+^2 \cos(qx/\sqrt{\mu}) \rangle,$$

$F(R) = \mu R^2 - \nu R^4/2 + \alpha R^6/3 - R^8/4$, et $\langle f | g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$.

Comme conséquence du forçage spatial, l'interaction entre les deux fronts (équation (3.12)), a un terme additionnel et désormais alterne entre forces attractives et répulsives. Il est important de noter que γ est un paramètre exponentiellement petit, proportionnel à η , et qu'il est d'ordre δ . Par conséquent, près du point de Maxwell le système présente une famille de points d'équilibre $\dot{\Delta} = 0$. Chaque point d'équilibre correspond à une solution localisée nucléée sur un état périodique, nous appelons ces solutions *structures localisés* (voir figure (3.18)). Les longueurs des structures localisés sont des multiples d'une longueur basique correspondant au structure localisé le plus petit. Nous appelons ces plus petits états *pics localisés*. Ces solutions correspondent aux observations expérimentales rapportées en [16] et aux solutions numériques montrées en [59].

Dans la figure (3.19), nous voyons le profil d'un pic localisé enregistré dans l'expérience de la Valve Optique à Cristaux Liquides (LCLV) [16].

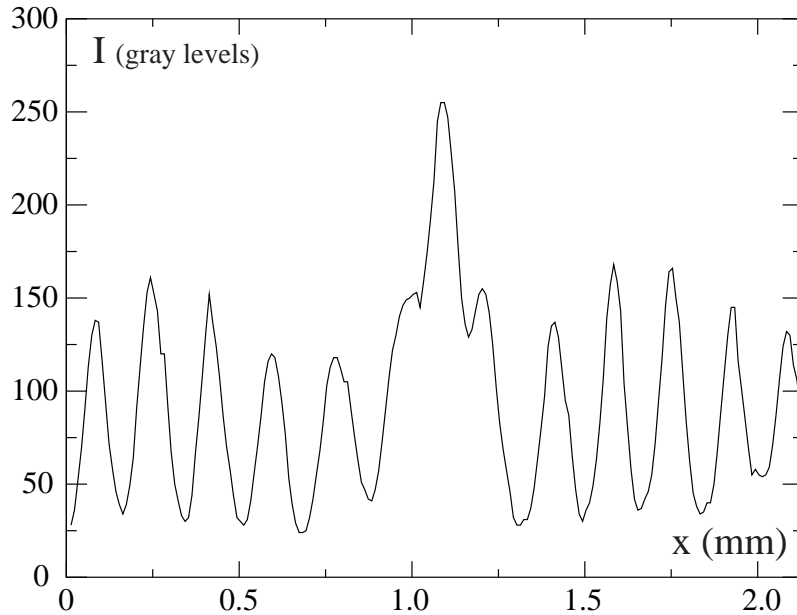


FIG. 3.19: Profil d'intensité d'un pic localisé unidimensionnel de l'expérience de la LCLV.

Publications

Bibliographie

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A., Eds. *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1974.
- [2] AKHMANOV, S. A., VORONTSOV, M. A., AND IVANOV, V. Y. *JETP Lett.* 47 (1988), 707.
- [3] ANDERSON, M., ENSHER, J., MATTHEWS, M., WIEMAN, C., AND CORNELL, E. *Science* 269 (1995), 198.
- [4] ANILKUMAR, A. V., LEE, C. P., AND WANG, T. G. *Phys. Fluids A* 3 (1991), 2587.
- [5] ARECCHI, F. T., BUAH-BASSUAH, P. K., FRANCINI, F., PEREZ-GARCIA, C., AND QUERCIOLO, F. *Europhys. Lett.* 9 (1989), 333.
- [6] ARECCHI, F. T., BUAH-BASSUAH, P. K., FRANCINI, F., AND RESIDORI, S. *Phys. Rev. E* 54 (1996), 424.
- [7] ARECCHI, F. T., BUAH-BASSUAH, P. K., AND PÉREZ-GARCIA, C. *Europhys. Lett.* 15 (1991), 429.
- [8] ARGENTINA, M., CLERC, M. G., ROJAS, R., AND TIRAPEGUI, E. *Phys. Rev. E* 71 (2005), 046210.
- [9] ARNOLD, V., Ed. *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires*. Éditions MIR, Moscou, 1996.
- [10] ASTROV, Y. A., AND LOGVIN, Y. A. *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997), 2983.
- [11] BENSIMON, D., SHRAIMAN, B. I., AND CROQUETTE, V. *Phys. Rev. A* 38 (1988), 5461.
- [12] BORATAV, O. N., PELZ, R. B., AND ZABUSKY, N. J. *Phys. Fluids A* 4 (1992), 581.
- [13] BORTOLOZZO, U. *Control of Optical Structures in a Liquid Crystal Light Valve experiment*. Thèse de Physique, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2005.
- [14] BORTOLOZZO, U., CLERC, M. G., FALCÓN, C., RESIDORI, S., AND ROJAS, R. *submitted to Phys. Rev. E* (2005).
- [15] BORTOLOZZO, U., ROJAS, R., AND RESIDORI, S. *Rencontre du Non-Linéaire* 8 (2005), 31.
- [16] BORTOLOZZO, U., ROJAS, R., AND RESIDORI, S. *Phys. Rev. E* 72 (2005), 045201(R).
- [17] BOSE, S. N. *Z. Phys.* 26 (1924), 178.

- [18] BUAH-BASSUAH, P. K., ROJAS, R., RESIDORI, S., AND ARECCHI, T. *Phys. Rev. E* 72 (2005), 075512.
- [19] BÉNARD, H. *Rev. Gén. Sciences Pure Appl.* 11 (1900), 1261.
- [20] CALISTO, H., CLERC, M. G., ROJAS, R., AND TIRAPEGUI, E. *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000), 3805.
- [21] CARBONE, V., CIPPARRONE, G., AND RUSSO, G. *Phys. Rev. E* 63 (2001), 051701.
- [22] CERDA, E., ROJAS, R., AND TIRAPEGUI, E. *J. Stat. Phys.* 101 (2000), 553.
- [23] CERDA, E., AND TIRAPEGUI, E. *J. Fluid Mech.* 368 (1998), 195.
- [24] CHANDRASEKHAR, S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover, 1981.
- [25] CHANDRASEKHAR, S. *Liquid Crystals*. Cambridge University Press ; 2 edition, 1992.
- [26] CHAPMAN, D. S., AND CRITCHLOW, P. R. *J. Fluid Mech.* 29 (1967), 117.
- [27] CHEN, C.-J., AND CHANG, L.-M. *J. Appl. Mech.* 39 (1972), 869.
- [28] CHEN, F. F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer ; 2 edition, 2005.
- [29] CLERC, M. G., AND FALCÓN, C. *Physica A* 356 (2005), 48.
- [30] CLERC, M. G., FALCÓN, C., AND TIRAPEGUI, E. *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005), 148302.
- [31] CLERC, M. G., PETROSSIAN, A., AND RESIDORI, S. *Phys. Rev. E* 71 (2005), 015205.
- [32] CLERC, M. G., RESIDORI, S., AND RIERA, C. S. *Phys. Rev. E* 63 (2001), 060701.
- [33] COLLET, P., AND ECKMANN, J. P. *Instabilities and Fronts in Extended Systems*. Princeton University Press, New Jersey, 1990.
- [34] COLLINGS, P. J., AND HIRD, M. *Introduction to Liquid Crystals ; Chemistry and Physics*. Taylor & Francis, 1998.
- [35] COULLET, P. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 12 (2002), 2445.
- [36] COULLET, P., ELPHICK, C., AND REPAUX, D. *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987), 884.
- [37] CROSS, M. C., AND HOHENBERG, P. C. *Rev. Mod. Phys.* 65 (1993), 851.
- [38] DE GENNES, P. G. *The physics of Liquid Crystals*. Oxford Science, Publications, Clarendon Press, 1993.
- [39] DOLIGALSKI, T. L., SMITH, C. R., AND WALKER, J. D. A. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 26 (1994), 573.
- [40] EDWARDS, W. S., AND FAUVE, S. *Phys. Rev. E* 47 (1993), R788.
- [41] EDWARDS, W. S., AND FAUVE, S. *J. Fluid Mech.* 278 (1994), 123.
- [42] EINSTEIN, A. *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)* 22 (1924), 261.
- [43] ELPHICK, C., TIRAPEGUI, E., BRACHET, M. E., COULLET, P., AND IOOSS, G. *Physica D* 29 (1987), 95.

- [44] ESCHENFELDER, H. A. *Magnetic Bubble Technology*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [45] FALCÓN, C. *Efectos Robustos de Ruido en Sistemas Extendidos*. Tesis de Magister, Universidad de Chile, 2005.
- [46] FARADAY, M. *Trans. R. Soc. London* 52 (1831), 299.
- [47] FRÉDERICKSZ, V., AND REPIEWA, A. *Z. Physik* 42 (1927), 532.
- [48] GETLING, A. V. *Rayleigh-Bénard Convection; structures and dynamics*. World Scientific, 1998.
- [49] GUCKENHEIMER, J., AND HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [50] GUYON, E., HULIN, J.-P., AND PETIT, L. *Hydrodynamique Physique*. InterEditions, Editions du CNRS, Paris, 1991.
- [51] HEINRICHS, R., AHLERS, G., AND CANNELL, D. S. *Phys. Rev. A* 35 (1987), R2761.
- [52] HELMHOLTZ, H. *Phil. Mag., Ser. 4*, 36 (1868), 337.
- [53] IOOSS, G., AND ADELMAYER, M. *Topics in Bifurcation Theory and Applications*. World Scientific, 1992.
- [54] KAWASAKI, K., AND OHTA, T. *Physica A* 116 (1982), 573.
- [55] KELVIN. *Mathematical and Physical Papers, iv, Hydrodynamics and General Dynamics*. Cambridge, England, 1910.
- [56] KOLODNER, P., BENSIMON, D., AND SURKO, C. M. *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988), 1723.
- [57] LEE, K.-J., MCCORMICK, W. D., PEARSON, J. E., AND SWINNEY, H. L. *Nature* 369 (1994), 215.
- [58] LIU, C. H. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 37 (2001), 501.
- [59] LOGVIN, Y. A., SCHÄPERS, B., AND ACKMANN, T. *Phys. Rev. E* 61 (2000), 4622.
- [60] LOMBARDI, E. *Oscillatory Integrals and Phenomena Beyond all Algebraic Orders*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [61] MARKUSHEVICH, A. I. *Theory of Functions of a Complex Variable, vol. 1*. Prentice-Hall, Inc., 1965.
- [62] McLAUGHLIN, D. W., MOLONEY, J. V., AND NEWELL, A. C. *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983), 75.
- [63] MELO, F., JOANNY, J. F., AND FAUVE, S. *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989), 1958.
- [64] NEUBECKER, R., OPPO, G.-L., THUERING, B., AND TSCHUDI, T. *Phys. Rev. A* 52 (1995), 791.
- [65] ORLANDI, P., AND VERZICCO, R. *J. Fluid Mech.* 256 (1993), 615.
- [66] OSWALD, P., AND PIERANSKI, P. *Les Cristaux Liquides; concepts et propriétés physiques illustrés par des expériences*. Gordon and Breach Science Publishers, 2000.

- [67] OTT, E. *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972), 1429.
- [68] PIRAT, C. *Structures d'un film visqueux bidimensionnel continûment alimenté sous gravité déstabilisante*. Thèse de Physique, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2004.
- [69] PIRAT, C., MATHIS, C., MAÏSSA, P., AND GIL, L. *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004), 104501.
- [70] POMEAU, Y. *Physica D* **23** (1986), 3.
- [71] RAMAZZA, P. L., BOCCALETTI, S., BORTOLOZZO, U., AND ARECCHI, F. T. *Chaos* **13** (2003), 335.
- [72] RAMAZZA, P. L., DUCCI, S., BOCCALETTI, S., AND ARECCHI, F. T. *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **2** (2000), 399.
- [73] RAYLEIGH. *Scientifics Papers, Vol. II*. Cambridge Univ. Press, Cambridge England, 1900.
- [74] RAYLEIGH. *Phil. Mag., ser. 6* **32** (1916), 529.
- [75] RESIDORI, S. *Fronts et Structures Spatiales dans une Valve à Cristal Liquide avec Retro-Action Optique*. Thèse de habilitation à diriger des recherches, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2003.
- [76] RESIDORI, S. *Phys. Rep.* **416** (2005), 201.
- [77] RESIDORI, S., PAMPALONI, E., BUAH-BASSUAH, P. K., AND ARECCHI, F. T. *Eur. Phys. J. B* **15** (2000), 331.
- [78] RIERA, C. *Structures Localisées et Dynamique de goutte-à-goutte*. Thèse de Physique, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2000.
- [79] RODRIGUEZ, F., AND MESLER, R. *J. Colloid Interface Sci.* **121** (1988), 121.
- [80] ROJAS, R. *Tópicos en Física No Lineal*. Tesis de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, 2001.
- [81] SAFFMAN, P. G. *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, 1992.
- [82] SCHÄPERS, B., FELDMANN, M., ACKEMANN, T., AND LANGE, W. *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000), 748.
- [83] SHARIFF, K., AND LEONARD, A. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **24** (1992), 235.
- [84] SHARP, D. H. *Physica D* **12** (1984), 3.
- [85] SHERWOOD, J. N. *Plastically Crystalline State*. John Wiley and Sons Ltd, 1979.
- [86] TARANENKO, V. B., GANNE, I., KUSZELEWICZ, R. J., AND WEISS, C. O. *Phys. Rev. A* **61** (2000), 063818.
- [87] TAYLOR, G. I. *Proc. Roy. Soc., Ser. A* **201** (1950), 192.
- [88] THOMSON, J. J., AND NEWALL, H. F. *Proc. R. Soc. London* **39** (1885), 417.
- [89] TONIOLO, C., RUSSO, G., RESIDORI, S., AND TRESSER, C. *submitted to International Journal of Bifurcation and Chaos* (2005).

- [90] TRITTON, D. J. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Science Publications; 2 edition, 1988.
- [91] UMBANHOWAR, P. B., MELO, F., AND SWINNEY, H. L. *Nature* 382 (1996), 793.
- [92] WALKER, J. D. A., SMITH, C. R., CERRA, A. W., AND DOLIGALSKI, T. L. *J. Fluid Mech.* 181 (1987), 99.

Résumé : Cette thèse se compose de trois parties. Dans la première est étudiée la vitesse d'un front entre un état homogène et un état périodique lorsque l'on ajoute les termes non résonants à la forme normale. On voit que cette vitesse est nulle sur un intervalle fini autour du point de Maxwell.

La seconde partie est consacrée à l'étude d'une goutte déposée adiabatiquement sur un solvant plus dense. La goutte tombe dans le solvant jusqu'à une hauteur minimale, ensuite la fragmentation a lieu et les gouttelettes secondaires remontent à la surface. On a développé un modèle théorique qui inclut l'essentiel du phénomène et prédit les échelles correctes du temps de montée et de la hauteur minimale.

La troisième partie concerne l'étude linéaire du modèle de la valve à cristaux liquides avec rétro-action optique. Elle permet de comprendre un nouveau type de structures localisées qui apparaissent comme des pics isolés sur une structure spatiale de plus faible amplitude.

Mots clés : Physique non linéaire, Instabilités hydrodynamiques, Anneau de vortécité, Cristaux liquides, Optique non linéaire, Bifurcations, Front de Pomeau, Effets non adiabatiques, Structures localisées.

On the drops, liquid crystals and fronts

Abstract : This thesis is divided into three parts. In the first part, the velocity of a front between an homogeneous state and a periodic state is studied with addition of the nonresonant terms to the normal form. We obtain that this velocity is zero on a finite interval around the Maxwell's point.

The second part is devoted to the study of a drop adiabatically deposited on a more dense solvent . The drop falls down to a minimum height inside the solvent, then fragmentation takes place and secondary droplets rise up to the surface. We have developed a theoretical model that captures the essential feature of the phenomenon and predicts the correct scalings for the rise-up time and the minimum height.

The third part deals with the linear study of the model of the liquid-crystal-light-valve with optical feedback. It allows one to understand a new type of localized structures, which appears as localized peaks over a pattern of smaller amplitude.

Key words : Nonlinear physics, Hydrodynamic instabilities, Vortex ring, Liquid crystals, Nonlinear optics, Bifurcations, Pomeau's front, Nonadiabatic effects, Localized structures.

Discipline : Physique

Université de Nice-Sophia Antipolis
Institut Non Linéaire de Nice - UMR 6618 CNRS
1361, route des Lucioles 06560 Valbonne, France

